

ベクトル公式マインドマップ

以下、平面ベクトルでは $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, 空間ベクトルでは $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とする。

ベクトルの基本

平行移動

$$\vec{AB} = \vec{CD}$$

ベクトルの演算

(1) 和

(2) 逆

(3) 平行, 一直線上

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b}$$

ベクトルの大きさの成分表示

三平方の定理
 $a^2 + b^2 = c^2$

$$|\vec{a}| = \begin{cases} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} & (\text{平面}) \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & (\text{空間}) \end{cases}$$

ベクトルの内積

内積の定義 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

内積の成分表示

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$= |\vec{a}| |\vec{b}| \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (\because \text{余弦定理})$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - ((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2)\} & (\text{平面}) \\ \text{省略} & (\text{空間}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_2 & (\text{平面}) \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & (\text{空間}) \end{cases}$$

内積の性質

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\uparrow \text{空間も同様})$$

同様に

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

ベクトルの垂直と内積

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\iff \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

ベクトルの和の長さの2乗

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

三角形の面積

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \quad (\text{平面空間共用})$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1| \quad (\text{平面ベクトル専用})$$

内分, 外分の位置ベクトル

P が線分 AB を $m:n$ に内分するとき

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$= \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{AB}$$

$$= \vec{a} + \frac{m}{m+n} (\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$= \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

P が線分 AB を $m:n$ に外分するとき

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$= \vec{a} + \frac{m}{m-n} \vec{AB}$$

$$= \vec{a} + \frac{m}{m-n} (\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$= \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

共線条件, 共面条件

P が直線 AB 上にあるとき

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$= \vec{a} + t\vec{AB}$$

$$= \vec{a} + t(\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$= (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

和が 1

P が $\triangle ABC$ と同一平面上にあるとき

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$= \vec{a} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

$$= \vec{a} + s(\vec{OB} - \vec{OA}) + t(\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$= (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

和が 1

ベクトル公式マインドマップ (問題 15分)

以下、平面ベクトルでは $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, 空間ベクトルでは $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とする。

ベクトルの基本

平行移動

$\vec{AB} =$

ベクトルの演算

(1) 和

(2) 逆

(3) 平行, 一直線上

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff$

ベクトルの大きさの成分表示

三平方の定理
 $a^2 + b^2 = c^2$

$|\vec{a}| =$ $\begin{cases} \text{(平面)} \\ \text{(空間)} \end{cases}$

ベクトルの内積

内積の定義 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

内積の成分表示

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$

内積の性質

$\vec{a} \cdot \vec{a} =$
 $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) =$

同様に
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} =$

ベクトルの垂直と内積

$\vec{a} \perp \vec{b}$

ベクトルの和の長さの2乗

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 =$

三角形の面積

$S =$

内分, 外分の位置ベクトル

P が線分 AB を $m:n$ に内分するとき
 $\vec{OP} =$

P が線分 AB を $m:n$ に外分するとき
 $\vec{OP} =$

共線条件, 共面条件

P が直線 AB 上にあるとき
 $\vec{OP} =$

P が $\triangle ABC$ と同一平面上にあるとき
 $\vec{OP} =$