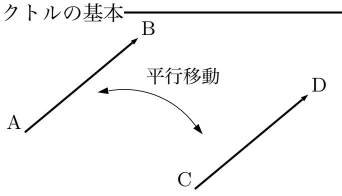
ベクトル公式マインドマップ

以下，平面ベクトルでは $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$，空間ベクトルでは $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ とする．

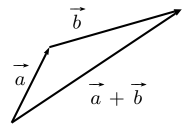
ベクトルの基本



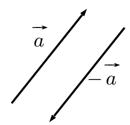
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

ベクトルの演算

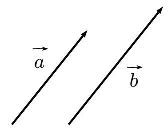
(1) 和



(2) 逆

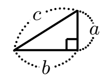


(3) 平行，一直線上



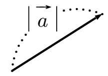
$$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \iff \vec{a}=k\vec{b}$$

三平方の定理



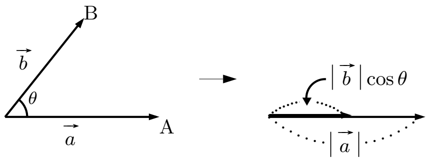
$$a^2+b^2=c^2$$

ベクトルの大きさの成分表示



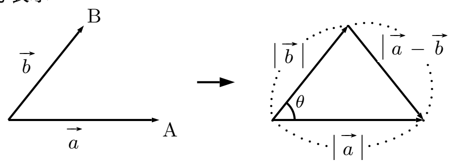
$$|\vec{a}|=\begin{cases}\sqrt{a_1^2+a_2^2} & \text{(平面)}\\ \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} & \text{(空間)}\end{cases}$$

ベクトルの内積



内積の定義 $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

内積の成分表示



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$=|\vec{a}||\vec{b}|\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} \quad (\because \text{余弦定理})$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-((a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2)\} & \text{(平面)}\\ \text{省略} & \text{(空間)}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{=}\begin{cases}\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2} & \text{(平面)}\\ \boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3} & \text{(空間)}\end{cases}$$

内積の性質

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)$$

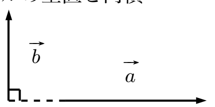
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_1c_1+a_2c_2$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \quad (\uparrow\text{空間も同様})$$

同様に

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

ベクトルの垂直と内積



$$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}}$$

$$\iff \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ\boldsymbol{=0}$$

ベクトルの和の長さの 2 乗

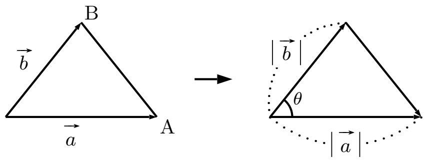
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

三角形の面積



$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

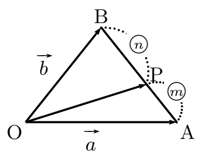
$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}} \quad \text{(平面空間共用)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|} \quad \text{(平面ベクトル専用)}$$

内分，外分の位置ベクトル



P が線分 AB を

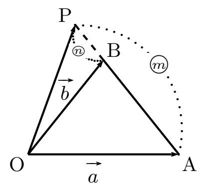
$m:n$ に内分するとき

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$

$$=\vec{a}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

$$=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\boldsymbol{=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}}$$



P が線分 AB を

$m:n$ に外分するとき

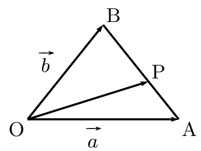
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$

$$=\vec{a}+\frac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$$

$$=\vec{a}+\frac{m}{m-n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\boldsymbol{=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}}$$

共線条件，共面条件



P が直線 AB 上にあるとき

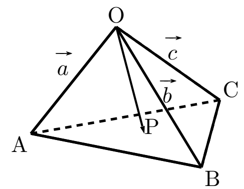
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{\overrightarrow{AP}}$$

$$=\vec{a}+\boldsymbol{t\overrightarrow{AB}}$$

$$=\vec{a}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}$$

和が 1



P が △ABC と同一平面上にあるとき

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{\overrightarrow{AP}}$$

$$=\vec{a}+\boldsymbol{s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}}$$

$$=\vec{a}+s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

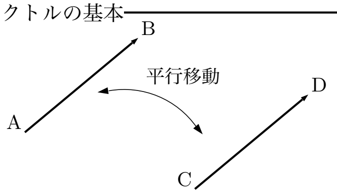
$$=\boldsymbol{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}}$$

和が 1

ベクトル公式マインドマップ (問題 ✍：15分)

以下，平面ベクトルでは $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，空間ベクトルでは $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ とする.

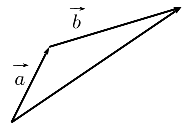
ベクトルの基本



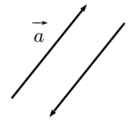
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$

ベクトルの演算

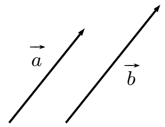
(1) 和



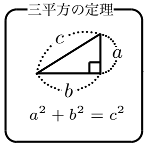
(2) 逆



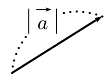
(3) 平行，一直線上



$\overrightarrow{a} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{b} \iff$

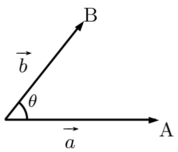


ベクトルの大きさの成分表示



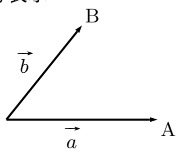
$|\overrightarrow{a}| = \begin{cases} & \text{(平面)} \\ & \text{(空間)} \end{cases}$

ベクトルの内積



内積の定義　$\boldsymbol{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=}$

内積の成分表示



$\boldsymbol{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=}$

内積の性質

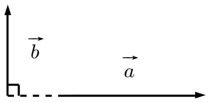
$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=$

$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=$

同様に

$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=$

ベクトルの垂直と内積



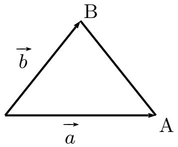
$\boldsymbol{\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}}$

$\iff$

ベクトルの和の長さの 2 乗

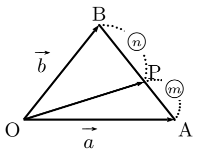
$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=$

三角形の面積



$\boldsymbol{S}=$

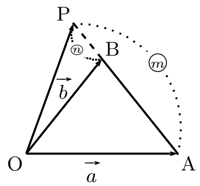
内分，外分の位置ベクトル



P が線分 AB を

$m:n$ に内分するとき

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$

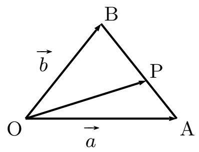


P が線分 AB を

$m:n$ に外分するとき

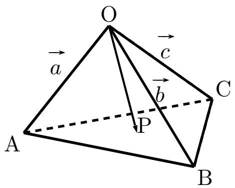
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$

共線条件，共面条件



P が直線 AB 上にあるとき

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$



P が △ABC と同一平面上にあるとき

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$