漸化式

メモ

まえがき

数列を初めて学ぶ高 1，2 生，あるいは基礎の確認をしたい受験生向けに，漸化式に特化した小さい本を作りました．とりあえず等差数列，等比数列，Σ 等は既習であることが前提です．

漸化式に関してはいろいろと思い入れがあるのですが，数学に苦手意識のあるみなさんにとってはもしかしたら

これが数学が得意だと自覚できるようになる最後の機会

かもしれません．私がそう考える理由は以下の 5 点です．

１．漸化式は，それまで数列で学ぶ等差数列，等比数列，階差数列，Σ 等の総復習，総点検の場でもあるから．
２．漸化式を通して数列だけでなく，2 次方程式，指数，対数，そして確率などの他の単元の鍛錬ができ，また問題演習を通して計算力の向上が見込めるから．
３．問題とそれに応じた解法のわかりやすいパターンが存在する．創造力よりも，解法暗記力が問われるので，数学の中でも，努力が報われやすい単元だから．
４．答え (一般項) を出したら，a_1，a_2 等を出してみて，検算ができるので，自分の出した答えに絶対的確信をもてる．こういう意味でも，努力が報われやすい単元だから．
５．数 III では序盤に “極限” という単元があり，もう一度漸化式が登場するので，理系の人にとってはこの努力がまた報われるから．

以上のような理由から，努力が報われやすいという点で漸化式は，起死回生の要となる重要単元であると主張したいと思います．ここまでありがたいと自覚してる人は実際には多くないと思います．しかしせっかくやる気が起きても，教材がダメでは元も子もありません．ということで今回は以下の 3 点に気をつけて書いてみました．

① 基本的に易→難になるようにできるだけ問題を見やすく配列し，自分がどこまで進めたのかを確認しやすくする．
② 類題は演習効果が高くなるように 3 問以下に厳選．やる気の維持と，実力養成をできるだけ両立する．
③ ★ で出題頻度を表示し，おすすめコースを案内し，できるだけ多くの数学を使う高校生のニーズに応えるようにする．

ということで，平岡は，教材は 24 時間みなさんとともにする可能性があるという意味で，手塩にかけて育てています．

数学に苦手意識のある，または今まで勉強してきたがあまり報われなかったという人にはこの教材を通して是非

漸化式→数列→数学

の順で得意になっていくことを願ってやみません．

わからないことがあったらお気軽に質問してください．

この本の使い方

それぞれのパターンにはそのパターンの紹介と解法が例題として載っています．最初にノートを準備し，できるならまずは，講義 と $\boxed{\text{解答}}$ を見ずに例題を解いてみてください．厳しいようならば 講義 だけをヒントとして少しチラ見すれば，解けるかもしれません．それでも厳しければ無理せずに $\boxed{\text{解答}}$ を見て，そのパターンではどういう答案を書けばいいのかを学んでください．その後に下に収録されている類題を解いてみてください．類題は基本的には，易→難に配列されているのでその順に解いてみればいいと思います．類題は例題より優しい問題から難しい問題まで，はたまた是非触れてほしい問題まですべて何かしらの意味を込めて採用しています．もし公式等を度忘れした場合は，6 ページの公式集を参照してください．類題が解けたら，自分の出した答え (一般項) が正しいのか，a_1，a_2 ぐらいまで出して確かめてみるといいと思います．試験のときにもそういった姿勢が役立つはずです．その後，巻末にすべての解答を載せたので，それを見てチェックして下さい．

この本ではそれなりに多くのパターンの問題を載せましたがこれでも，大学入試で出題されるすべてのパターンを網羅しているわけではありません．大学入試は，高校生を振るい落とし選抜するための試験ですから，見たことがないような問題が出題されることがあります．しかしそういった多くの問題が，最初に何かアプローチを施せば，この本で挙げたパターンに帰着することが多かったりします．そういう意味で，マイナーなパターンをすべて載せていてはきりがありません．つまり，難関大学を目指す高校生が高 1，2 生のうちにやっておくべきパターンをこの本で取り上げています．

また数列の最後の単元である，数学的帰納法はこの本では出てこないので未習でも進められます．しかし難解な漸化式を解く上では，予想して数学的帰納法で証明するという最終手段があることは頭にいれておくべきでしょう．

5 ページにおすすめコースを書いたので，それを参考にして選んで解き進めていけばいいと思います．

この本を始める前の注意

・この本ではただ単に漸化式と初項が与えられていた場合，一般項を求めるものとする．

・S_n は数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの和とする．

目次

1　漸化式について

1.1　漸化式とは

ここに，数列

$$\{a_n\}\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots$$

がある．この数列の後ろの「$\cdots$」を避けて，各項を一発ですっきり表す方法が一般項でした．

しかし見方を変えて，2 を足すと次の項になる，つまり「n 番目に 2 を足すと $n+1$ 番目になる」と考えれば，次のようにも書けます．

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

そして初項が $a_1 = 3$ などのように定められれば，数列が帰納的に決まっていく．

これらのように，隣同士の関係により数列の性質を表す式を**漸化式** (または差分方程式) といいます．

1.2　ちょっとした注意

漸化式の構造　添字のナンバリング，および初項に注意します．次の 2 つの漸化式は同値であることがわかるでしょうか．

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 3 \\ a_{n-1} = \dfrac{1}{2}a_n - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

これら一般項 a_n は同じになります．問題が下の式で出題された場合は，上の式に変形することで漸化式構造が明らかになり，一般項が求められます．

1.3　漸化式の主な出題タイプ

・隣接 2 項間漸化式			入試出題頻度
2・1 型	$a_{n+1} = a_n + d$	(等差型)	★★★★★
2・2 型	$a_{n+1} = ra_n$	(等比型)	★★★★★
2・3 型	$a_{n+1} = a_n + f(n)$	(階差型)	★★★★
2・4 型	$a_{n+1} = pa_n + q$	(特性方程式利用型)	★★★★
2・5 型	$a_{n+1} = pa_n + q \cdot r^n$	(指数型)	★★★
2・6 型	$a_{n+1} = \dfrac{pa_n}{qa_n + r}$	(逆数型)	★★★
2・7 型	$a_{n+1} = pa_n + f(n)$	(n 次式スライド型)	★★★
2・8 型	$a_{n+1} = f(n)a_n$	(階比型)	★★
2・9 型	$a_{n+1} = pa_n{}^q$	(対数型)	★★
2・10 型	$a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$	(1 次分数型)(特性方程式利用)	★
・隣接 3 項間漸化式			
3・1 型	$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$	(特性方程式利用)	★★★
3・2 型	$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = r$	(特性方程式利用)	★
・S_n と a_n の漸化式			★★★
・連立漸化式			★★★
・漸化式の応用問題			★★★

おすすめコース

・教科書範囲．数学を使うのがセンターまで，あるいは中堅大学志望の人 ··· ★★★★ 以上

・教科書の発展まで含めた範囲．難関大学志望の人 ························ ★★★ 以上

・漸化式を通して，難関大学に通用する数列力を確実につけたい人 ········· ★ 以上

1.4　数列の公式集

1　等差数列

$$\begin{tikzcd} a_1, \arrow[r, bend right, "+d"'] & a_2, \arrow[r, bend right, "+d"'] & a_3, \arrow[r, bend right, "+d"'] & \cdots, \arrow[r, bend right, "+d"'] & a_{n-1}, \arrow[r, bend right, "+d"'] & a_n \end{tikzcd}$$

・公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項　$\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)d}$　**($\boldsymbol{k = 1, 2, \cdots, n}$ をとる定数)**

・等差数列の和　$\boldsymbol{\bigl(\text{初項} + \text{末項}\bigr) \times \text{個数} \times \dfrac{1}{2}}$

2　等比数列

$$\begin{tikzcd} a_1, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & a_2, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & a_3, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & \cdots, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & a_{n-1}, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & a_n \end{tikzcd}$$

・公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項　$\boldsymbol{a_n = a_k \cdot r^{n-k}}$　**($\boldsymbol{k = 1, 2, \cdots, n}$ をとる定数)**

・等比数列の和　$\boldsymbol{\dfrac{\text{初項} - \text{末項} \times \text{公比}}{1 - \text{公比}}}$

3　Σ

・$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

・$\boldsymbol{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc}$　　・$\boldsymbol{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)}$　　・$\boldsymbol{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

・$\boldsymbol{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}$　　・$\boldsymbol{\displaystyle\sum_{\text{初}}^{\text{末}} \text{等比数列} = \frac{\text{初項} - \text{末項} \times \text{公比}}{1 - \text{公比}}}$

4　階差数列をとると求められる数列

$$\begin{tikzcd} a_1, \arrow[r, bend right, "b_1"'] & a_2, \arrow[r, bend right, "b_2"'] & a_3, \arrow[r, bend right, "b_3"'] & \cdots, \arrow[r, bend right, "b_{n-2}"'] & a_{n-1}, \arrow[r, bend right, "b_{n-1}"'] & a_n \end{tikzcd}$$

・階差数列が $\{b_n\}$ である数列 $\{a_n\}$ の一般項　$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k & (n \geqq 2) \\ a_1 & (n = 1) \end{cases}}$

5　和と一般項

・和 S_n で a_n を表現すると　$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2) \\ S_1 & (n = 1) \end{cases}}$

2　隣接２項間漸化式

2・1 型　$a_{n+1} = a_n + d$　(等差型)

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2$$

講義　次の項になるのに毎回 2 足されているので等差数列であることがわかります．$a_1 = 1$ から代入していくと，$a_2 = 3$，$a_3 = 5$，$a_4 = 7 \cdots$ となり，しかもこの場合は奇数列．等差数列の一般項の公式は，公差を d とすると

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

です．

解答　これは初項 1，公差 2 の等差数列なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_n} &= 1 + (n-1)2 \\ &\boldsymbol{= 2n - 1} \end{aligned}$$

類題 1　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 4$，$a_{n+1} = a_n + 6$

(2) $a_1 = 7$，$a_{n+1} = a_n - 4$

(3) $a_3 = 8$，$a_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{3}$

2・2 型　$a_{n+1} = ra_n$　(等比型)

$$a_1 = 6,\ a_{n+1} = 3a_n$$

講義　次の項になるのに毎回 3 倍されているため今度は等比数列であることがわかります．等比数列の一般項の公式は，公比を r とすると

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

です．

解答　これは初項 6，公比 3 の等比数列なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_n} &= 6 \cdot 3^{n-1} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} \\ &\boldsymbol{= 2 \cdot 3^n} \end{aligned}$$

類題 2　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n$

(2) $a_1 = 10,\ a_{n+1} = 5a_n$

(3) $a_3 = 6,\ a_{n+1} = -\dfrac{2}{3}a_n$

$2 \cdot 3$ 型　$a_{n+1} = a_n + f(n)$　(階差型)

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 4n + 3$$

講義　2 項間の差が $4n+3$，つまり階差数列が等差数列になっています．$f(n)$ を階差数列とすると a_n の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) & (n \geqq 2) \\ a_1 & (n = 1) \end{cases}}$$

です．n 番目の木を求めるには，最初の木に“間(あいだ)”を $n-1$ 個足してあげればいいという植木算的な考え方．階差を取るので，$n \geqq 2$ のとき限定．最後に $n=1$ のとき，a_n が初項でも成り立つか確認します (普通の問題の場合は成り立つ)．

勘違いしやすいけど階差数列は $f(n)$ であって，a_n ではありません．

解答　$n \geqq 2$ のとき，
$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k+3) \\ &= 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 3(n-1) \\ &= 2n^2 + n - 2 \end{aligned}$$

$n=1$ のとき，$a_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 - 2 = 1$ より，$n=1$ のときも成り立つ．

$$\therefore \boldsymbol{a_n = 2n^2 + n - 2}$$

類題 3　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2n$

(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 12n^2 + 4$

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n - 3n$

$2\cdot 4$ 型　$a_{n+1}=pa_n+q$　(特性方程式利用型)

$$a_1=6,\ a_{n+1}=3a_n-8$$

講義　もしこの数列から α だけずらして，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ という形に変形できれば，$\{a_n-\alpha\}$ は公比 p の等比数列になるので，等比型の解き方が使えます．ここで

$$\begin{array}{rr} & a_{n+1}=pa_n+q \\ -) & a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha) \\ \hline & \boldsymbol{\alpha=p\alpha+q} \end{array}$$

特性方程式

上の引き算を考えると，α を導くための方程式が導出される．これを**特性方程式** (と呼ぶ慣習があります) といい，算出された α を**特性 (特殊) 解**といいます．α を求めたら，ずらした数列である $\boldsymbol{\{a_n-\alpha\}}$ **の一般項を求めます** (これより定数スライド型とネーミングしてもいいかもしれません)．あとは α を移行しておわり．

例題では，特性方程式は，a_{n+1} と a_n をともに α に変えて

$$\alpha=3\alpha-8$$

となります．特性解は

$$\alpha=4$$

となるので与式は

$$a_{n+1}-4=3(a_n-4)$$

と変形できる．これを導くまでの過程は答案に書いても書かなくても大丈夫です．

解答　特　$\alpha=3\alpha-8$　$\therefore \alpha=4$

与式を $a_{n+1}-4=3(a_n-4)$ と変形すると $\{a_n-4\}$ の一般項は初項 $a_1-4=2$，公比 3 の等比数列なので

$$a_n-4=2\cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n=2\cdot 3^{n-1}+4}$$

類題 4　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=6a_n-15$

(2) $a_1=-3,\ a_{n+1}=2a_n+9$

(3) $a_1=-1,\ 5a_{n+1}=3a_n+8$

2・5 型　$a_{n+1} = pa_n + q \cdot r^n$　(指数型)

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n + 2^n$$

講義　**両辺 $\boldsymbol{2^{n+1}}$ で割ると**

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2 \cdot 2^n}$$

$$\iff \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

となる．**波線のように添え字と指数の $\boldsymbol{n}$ のナンバリングを揃えるように変形します．**

ここで，$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

となり，2・4 型に帰着できる．ちなみに b_n の初項は

$$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

です．

解答　両辺 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

ここで，$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_1 = \dfrac{a_1}{2^1} = 1$

$$b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

$$\iff b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1)$$

よって，$\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 2$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列なので

$$b_n + 1 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n} = 2^n b_n = 2^n \left\{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right\} \boldsymbol{= 4 \cdot 3^{n-1} - 2^n}$$

類題 5　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 6,\ a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

(2) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n + 5 \cdot 3^n$

(3) $a_1 = -30,\ 9a_{n+1} = a_n + \dfrac{4}{3^n}$

2・6 型　$a_{n+1} = \dfrac{pa_n}{qa_n + r}$　(逆数型)

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$$

講義　このタイプは**両辺の逆数をとって**

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{a_n} = \frac{3 + a_n}{a_n} = \frac{3}{a_n} + 1$$

と変形し，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ と置き換えることで

$$b_{n+1} = 3b_n + 1$$

となり，2・4 型に帰着させます．ちなみに b_n の初項は

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$$

です．注意事項は，最初に逆数をとるときに，$a_n \fallingdotseq 0$ であることを断ってから逆数をとること (分母が 0 は定義できないため)．

解答　$a_1 = 1$ および漸化式の形から $a_n > 0$ であるから，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3}{a_n} + 1$$

ここで，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$

$$b_{n+1} = 3b_n + 1$$

$$\iff b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right)$$

よって $\left\{b_n + \dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $\dfrac{3}{2}$，公比 3 の等比数列なので

$$b_n + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n = \frac{2}{3^n - 1}}$$

類題 6　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n + 3}$

(2) $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 - a_n}$

(3) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{na_n + 1}$

2・7 型　$a_{n+1} = pa_n + f(n)$　(n 次式スライド型)

$$a_1 = 6,\ a_{n+1} = 2a_n + 4n + 3$$

講義　$f(n)$ は n の多項式です．センター試験においては 2012 年に誘導付きで出題されています．これは

$$\boldsymbol{a_{n+1} + g(n+1) = p(a_n + g(n))}$$

と変形することで $\{a_n + g(n)\}$ が公比 p の等比数列となり，等比型の解き方が使えるのでこう変形します．出てきた $g(n)$ は n の関数です．例題の場合 $g(n)$ は n の 1 次式，類題 (3) の場合は n の 2 次式となればいいので自分で設定して求めます．

解答　$g(n) = \alpha n + \beta$ とおくと

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} + g(n+1) = 2(a_n + g(n)) \\
\Longleftrightarrow\ &a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(a_n + \alpha n + \beta) \\
\Longleftrightarrow\ &a_{n+1} = 2a_n + \alpha n - \alpha + \beta
\end{aligned}$$

これを与式と比較すると

$$\begin{cases} \alpha = 4 \\ -\alpha + \beta = 3 \end{cases} \qquad \therefore \alpha = 4,\ \beta = 7$$

よって与式を $a_{n+1} + 4(n+1) + 7 = 2(a_n + 4n + 7)$ と変形すると，$\{a_n + 4n + 7\}$ は初項 $a_1 + 4 + 7 = 17$，公比 2 の等比数列なので

$$a_n + 4n + 7 = 17 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n = 17 \cdot 2^{n-1} - 4n - 7}$$

類題 7　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + n - 1$

(2) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + n$

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - n^2 + 2n$

2・8 型　$a_{n+1} = f(n)a_n$　(階比型)

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n$$

講義　このタイプは教えていて苦手な人が多いように思います．$\dfrac{n+2}{n}$ は公比っぽいですが n の値によって変わるので等比数列ではありません．この $f(n)$ のことは (階差数列ならぬ) 階比数列と名付けることもできるかもしれません．階比型の漸化式みたいに．

解法ですが，両辺に同じ作業を施してなんとか **n のナンバリングの対応を揃えるように**変形します．

この問題の場合は，両辺 $(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_n}{n(n+1)}$$

となり，n のナンバリングの対応をそれぞれ揃えることができました (波線に注目)．この後は $b_n = \dfrac{a_n}{n(n+1)}$ とおけば，$b_{n+1} = b_n = \cdots = b_1$ となり，b_n，それから a_n が求まります．

結論としてこの問題は，ナンバリングが 1 つずれた組を作るためにどういう操作をすればいいかを見定めるのがキーとなりここが難しい．何題か経験してみましょう．

解答　両辺 $(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_n}{n(n+1)}$$

ここで，$b_n = \dfrac{a_n}{n(n+1)}$ とおくと

$$b_{n+1} = b_n = b_{n-1} = \cdots = b_1 = \frac{a_1}{1 \cdot 2} = 1$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n} = n(n+1)b_n \boldsymbol{= n(n+1)}$$

類題 8　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 2,\ na_{n+1} = \dfrac{1}{3}(n+1)a_n$

(2) $a_1 = \dfrac{7}{2},\ (n+2)a_{n+1} = 7na_n$

(3) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n}a_n + 1$

2・9 型　$a_{n+1} = p{a_n}^q$　(対数型)

$$a_1 = 10,\ a_{n+1} = \sqrt{\sqrt{10a_n}}$$

講義　書き直すと

$$a_{n+1} = \sqrt{\sqrt{10a_n}} = \{(10a_n)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} = (10a_n)^{\frac{1}{4}} = 10^{\frac{1}{4}} \cdot {a_n}^{\frac{1}{4}}$$

になります．このように a_{n+1} と a_n の次数が違うときは，**両辺の対数を取れば解決．** 対数の底はどんな底でも結果は同じになりますが，p や初項の値を底に取ると楽に計算できます (ただし 1 は底に取れない)．

解答　両辺 10 を底とする対数を取ると

$$\begin{aligned}\log_{10} a_{n+1} &= \log_{10} \sqrt{\sqrt{10a_n}} \\ &= \log_{10}(10^{\frac{1}{4}} \cdot {a_n}^{\frac{1}{4}}) \\ &= \log_{10} 10^{\frac{1}{4}} + \log_{10} {a_n}^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log_{10} a_n\end{aligned}$$

ここで，$b_n = \log_{10} a_n$ とおくと，$b_1 = \log_{10} 10 = 1$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}b_n$$

$$\iff b_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

よって，$\left\{b_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $\frac{2}{3}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列なので

$$b_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\iff b_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n} = 10^{b_n} \boldsymbol{= 10^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}}}$$

類題 9　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = {a_n}^2$

(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 16{a_n}^5$

(3) $a_1 = 9,\ a_{n+1} = 3^n {a_n}^2$

2・10 型　$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$　(1 次分数型)

$$a_1=7,\ a_{n+1}=\frac{7a_n+3}{a_n+5}$$

講義　2・6 型の一般化．誘導なしでは出題されにくいでしょうが，2015 年には東工大で誘導なしの出題がありました．

$b_n=\dfrac{a_n-\alpha_1}{a_n-\alpha_2}$ と変形することで $b_{n+1}=Rb_n$ の形に置き換えて解くのが狙いです．ではこの α_1，α_2 はどう決まるのか．

$$\begin{aligned}
b_{n+1}&=\frac{a_{n+1}-\alpha_1}{a_{n+1}-\alpha_2}\\
&=\frac{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha_1}{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha_2}\\
&=\frac{(p-r\alpha_1)a_n+q-s\alpha_1}{(p-r\alpha_2)a_n+q-s\alpha_2}\\
&=\frac{\dfrac{p-r\alpha_1}{p-r\alpha_2}a_n+\dfrac{q-s\alpha_1}{p-r\alpha_2}}{a_n+\dfrac{q-s\alpha_2}{p-r\alpha_2}}=\frac{Ra_n-R\alpha_1}{a_n-\alpha_2}=Rb_n
\end{aligned}$$

上の式を眺めると

$$\frac{q-s\alpha_2}{p-r\alpha_2}=-\alpha_2,\ \frac{p-r\alpha_1}{p-r\alpha_2}=R,\ \frac{q-s\alpha_1}{p-r\alpha_2}=-R\alpha_1$$

であればいいはずです．上式の R を消去すると

$$\frac{q-s\alpha_2}{p-r\alpha_2}=-\alpha_2,\qquad \frac{q-s\alpha_1}{p-r\alpha_1}=-\alpha_1,$$

となり，さらに式変形すると

$$\alpha_2=\frac{p\alpha_2+q}{r\alpha_2+s}\qquad \alpha_1=\frac{p\alpha_1+q}{r\alpha_1+s}$$

となるので，これは言ってみれば α_1，α_2 どちらも

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}}$$

a_{n+1} と a_n を α に置き換えるだけ

の解であるので，上が特性方程式になります．解き方は，まず特性方程式を解き

(i) α が異なる 2 解 (α_1,α_2) のとき，$\boldsymbol{b_n=\dfrac{a_n-\alpha_1}{a_n-\alpha_2}}$ と変形して等比型に．または $\boldsymbol{b_n=a_n-\alpha}$ とおいて 2・6 型に持ち込んでも解けますがこっちは少し面倒くさい．

(ii) α が重解のときは，$\boldsymbol{b_n=a_n-\alpha}$ とおいて 2・6 型に持ち込みます．

$\boxed{\text{解答}}$ ㊕ $\alpha=\dfrac{7\alpha+3}{\alpha+5}\iff\alpha^2-2\alpha-3=0\iff\alpha=-1,3$

よって $b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-3}$ とおくと，$b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-3}=2$ $\left(※\ b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}\ \text{でもよい}\right)$

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-3}\\&=\frac{\dfrac{7a_n+3}{a_n+5}+1}{\dfrac{7a_n+3}{a_n+5}-3}\\&=\frac{7a_n+3+a_n+5}{7a_n+3-3(a_n+5)}\\&=\frac{8a_n+8}{4a_n-12}\\&=2\frac{a_n+1}{a_n-3}\\&=2b_n\end{aligned}$$

よって，$\{b_n\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列より

$$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

戻すと

$$\begin{aligned}&2^n=\frac{a_n+1}{a_n-3}\\\iff&(a_n-3)2^n=a_n+1\\\iff&(2^n-1)a_n=3\cdot 2^n+1\end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=\frac{3\cdot 2^n+1}{2^n-1}}$$

類題 10　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+4}$

(2) $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}$

3　隣接 3 項間漸化式

3・1 型　$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$$

講義　$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0\cdots$ ① を，もし $a_{n+2}-\alpha_1a_{n+1}=\alpha_2(a_{n+1}-\alpha_1a_n)\cdots$ ② と変形できれば，$\{a_{n+1}-\alpha_1a_n\}$ は公比が α_2 の等比数列になるのでこれを狙います．② を変形すると $a_{n+2}-(\alpha_1+\alpha_2)a_{n+1}+\alpha_1\alpha_2a_n=0$ であるので ① と係数比較すると

$$\alpha_1+\alpha_2=-p,\quad \alpha_1\alpha_2=q$$

となりますが，α_1 と α_2 は解と係数の関係より 2 次方程式 $\boldsymbol{\alpha^2+p\alpha+q=0}$ の解であるので，これを特性方程式とします．解き方は，まず特性方程式を解き

(i) α が異なる 2 解 (α_1,α_2) のとき，$\begin{cases}\boldsymbol{a_{n+2}-\alpha_1a_{n+1}=\alpha_2(a_{n+1}-\alpha_1a_n)}\\\boldsymbol{a_{n+2}-\alpha_2a_{n+1}=\alpha_1(a_{n+1}-\alpha_2a_n)}\end{cases}$ **と変形して，$\boldsymbol{\{a_{n+1}-\alpha_1a_n\}}$，$\boldsymbol{\{a_{n+1}-\alpha_2a_n\}}$ の一般項を出して辺々引く．**

(ii) α が重解のとき，**$\boldsymbol{a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)}$ と変形して，$\boldsymbol{\{a_{n+1}-\alpha a_n\}}$ の一般項を出して 2・5 型に持ち込む．**

例題の場合は特性方程式は

$$\alpha^2=\alpha+6$$

となり，$\alpha=-2,\ 3$ を得るので，与式を

$$\begin{cases}a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)\\a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)\end{cases}$$

と変形すれば，$\{a_{n+1}+2a_n\}$，$\{a_{n+1}-3a_n\}$ はそれぞれ公比が 3，-2 の等比数列となるわけです．

解答　特　$\alpha^2=\alpha+6\iff\alpha=-2,\ 3$ より与式を

$$\begin{cases}a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)\\a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)\end{cases}$$

と変形すると，$\{a_{n+1}+2a_n\}$ は初項 $a_2+2a_1=4$，公比 3 の，$\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=-1$，公比 -2 の等比数列となるので，それぞれの一般項は

$$\begin{cases}a_{n+1}+2a_n=4\cdot3^{n-1}\\a_{n+1}-3a_n=-(-2)^{n-1}\end{cases}$$

となる．辺々引くと

$$5a_n=4\cdot3^{n-1}+(-2)^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n=\frac{4}{5}\cdot3^{n-1}+\frac{1}{5}(-2)^{n-1}}$$

$\boxed{\text{余談}}$ 初期条件なしにとりあえず問題が $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ だけだとしたらどうだろう．

一般項を $a_n=\alpha^n\ (\alpha\fallingdotseq 0)$ と仮定してみると

$$\begin{aligned}\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+6\alpha^n &\iff \alpha^n(\alpha^2-\alpha-6)=0\\ &\iff \alpha=-2,\ 3\end{aligned}$$

となり，一般項は $a_n=(-2)^n,\ 3^n$ が解となり，これが特殊解です．

ここから初期条件 a_1，a_2 を与えるが，当然上の 2 つの特殊解では初期条件を満足できないので，改めて a_n の一般項を

$$a_n=C_1\cdot(-2)^n+C_2\cdot 3^n \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は定数}) \qquad \cdots\ ☆$$

とおく．これを漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ の一般解といいます．初期条件 a_1，a_2 から定数 C_1，C_2 が 1 つに定まり，一般項が求まります．ここでも結局，上の結果を導くための方程式，$\alpha^2-\alpha-6=0$ を解くことがキーとなるわけです．

これを記述式の答案で使いたい場合は，上のくだりを答案にすればいいわけですが，一般項を $a_n=\alpha^n$ $(\alpha\fallingdotseq 0)$ と仮定することが飛躍しているので，減点になる可能性があり，使わないことが無難です．マーク式や答えのみ書く形式の場合はこの解き方が早いです．

この考え方で隣接 n 項間 (隣接 4 項間以上) の漸化式を解くことができます．隣接 4 項間漸化式に関連する問題は例えば，2016 年北海道大，2016 年早稲田大理工等が思い当たります．

類題 11　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=3$，$a_2=5$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$

(2) $a_1=0$，$a_2=3$，$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

(3) $a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$　(フィボナッチ数列)

3・2 型　$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=r$

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n-2$$

講義　先ほどの 3・1 型に定数のおまけがついたもの．これだけで若干計算は面倒だけども考え方は難しくないです．2017 年順天堂大医学部で，最初にこのタイプの出題がありました．

いったん 3・1 型のように定数のおまけなしに

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$$

の特性方程式 $\alpha^2=4\alpha-3$ を考え，$\alpha=1,\ 3$ を出して与式を 3・1 型と同じように変形し，その後に定数のおまけをつけ忘れないようにします．すると

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)-2 \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=a_{n+1}-3a_n-2 \end{cases}$$

となります．ここで $a_{n+1}-a_n=b_n$，$a_{n+1}-3a_n=c_n$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+1}=3b_n-2 \\ c_{n+1}=c_n-2 \end{cases}$$

となるわけです．これで b_n は 2・4 型，c_n は等差型になり，求めることができます．あとは 3・1 型と同じ流れ．ここまで読んでるあなたなら大丈夫．

ちなみに最初で，$1+p+q\fallingdotseq 0$ ならば，最初に $a_n-k=b_n$ などとして 3・1 型に持ち込んでも OK です．2017 年の順天堂では，この方法での誘導でした．

解答　特性方程式 $\alpha^2=4\alpha-3 \iff \alpha=1,\ 3$ より与式を

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)-2 \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=a_{n+1}-3a_n-2 \end{cases}$$

と変形する．ここで $a_{n+1}-a_n=b_n$，$a_{n+1}-3a_n=c_n$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+1}=3b_n-2 \quad b_1=a_2-a_1=4-1=3 \\ c_{n+1}=c_n-2 \quad c_1=a_2-3a_1=1 \end{cases}$$

となる．先に b_n を求める．

$$b_{n+1}-1=3(b_n-1)$$

と変形すると，$\{b_n-1\}$ の一般項は

$$b_n-1=(b_1-1)\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$$

となるので

$$b_n=2\cdot 3^{n-1}+1$$

また c_n は

$$c_n=1+(n-1)(-2)=-2n+3$$

となるから，戻すと

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = b_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1 \\ a_{n+1} - 3a_n = c_n = -2n + 3 \end{cases}$$

辺々引くと

$$2a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 2n - 2$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n = 3^{n-1} + n - 1}$$

類題 12　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 2$

(2) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 6$

4　S_n と a_n の漸化式

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする．

$$S_n = \frac{3}{2}a_n + 3 - 4n$$

講義　a_n を S_n で表現した公式

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2) \\ S_1 & (n = 1) \end{cases}}$$

を利用するために，与式の n のナンバリングをずらして引きます．今回は上にずらして引きます．

解答　与式の n のナンバリングを上にずらして，与式と辺々引くと

$$\begin{array}{rrl} & S_{n+1} &= \dfrac{3}{2}a_{n+1} + 3 - 4(n+1) \\ -) & S_n &= \dfrac{3}{2}a_n + 3 - 4n \\ \hline & a_{n+1} &= \dfrac{3}{2}a_{n+1} - \dfrac{3}{2}a_n - 4 \end{array}$$

整理すると，

$$a_{n+1} = 3a_n + 8 \cdots ①$$

が得られた．a_1 を得るには与式に $n = 1$ を代入すれば

$$S_1 = a_1 = \frac{3}{2}a_1 + 3 - 4 \iff a_1 = 2$$

であり，①を変形すると

$$a_{n+1} + 4 = 3(a_n + 4)$$

となるから，$\{a_n + 4\}$ の一般項は

$$a_n + 4 = (a_1 + 4) \cdot 3^{n-1} = 6 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^n - 4}$$

類題 13　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする．

(1) $S_n = 3a_n + 2n + 1$

(2) $a_1 = 0$，$a_2 = 1$，$(n-1)^2 a_n = S_n$ $(n \geqq 1)$

5　連立漸化式

$$a_1=6,\ b_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3b_n,\ b_{n+1}=2a_n+2b_n$$

講義　ずらして隣接 3 項間にしたり，旧過程では行列を使ったり，解法はいくつかありますが，与式を

$$\boldsymbol{a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)}$$

と変形できれば $\{a_n+\alpha b_n\}$ は公比が β の等比数列になります．このことを利用するのが一番楽です．

解答　$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)\cdots$ ① とおく．左辺に与式を代入すると

$$\begin{aligned}a_{n+1}+\alpha b_{n+1}&=a_n+3b_n+\alpha(2a_n+2b_n)\\&=(1+2\alpha)a_n+(3+2\alpha)b_n\cdots ②\end{aligned}$$

となるので，①と②を係数比較すると

$$\begin{cases}\beta=1+2\alpha\\ \beta\alpha=3+2\alpha\end{cases}$$

となるから

$$(1+2\alpha)\alpha=3+2\alpha$$
$$\therefore(\alpha,\beta)=(-1,\ -1),\ \left(\frac{3}{2},\ 4\right)$$

より与式を

$$\begin{cases}a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)\\ a_{n+1}+\dfrac{3}{2}b_{n+1}=4\left(a_n+\dfrac{3}{2}b_n\right)\end{cases}$$

と変形できるから，$\{a_n-b_n\}$，$\left\{a_n+\dfrac{3}{2}b_n\right\}$ の一般項は

$$\begin{cases}a_n-b_n=(a_1-b_1)(-1)^{n-1}=5(-1)^{n-1}\\ a_n+\dfrac{3}{2}b_n=\left(a_1+\dfrac{3}{2}b_1\right)4^{n-1}=\dfrac{15}{2}\cdot4^{n-1}\end{cases}$$

辺々引くと

$$-\frac{5}{2}b_n=-\frac{15}{2}\cdot4^{n-1}+5(-1)^{n-1}$$
$$\therefore\boldsymbol{b_n=3\cdot4^{n-1}-2(-1)^{n-1}}$$
$$\therefore\boldsymbol{a_n}=b_n+5(-1)^{n-1}=\boldsymbol{3\cdot4^{n-1}+3(-1)^{n-1}}$$

類題 14　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=4,\ b_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3b_n,\ b_{n+1}=3a_n+b_n$

(2) $a_1=1,\ b_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-b_n,\ b_{n+1}=a_n+4b_n$

6　漸化式の応用問題

A の袋には赤玉 1 個と黒玉 3 個が，B の袋には黒玉だけが 5 個入っている．それぞれの袋から同時に 1 個ずつ玉を取り出して入れかえる操作を繰り返す．この操作を n 回繰り返した後に A の袋に赤玉が入っている確率を a_n とする．

(1) a_1，a_2 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) a_n を n の式で表せ．

講義　今回は代表して確率漸化式の問題．確率だけでなく，文章を読み取りそこから漸化式を立式させる問題は難関大の入試問題に多いです．漸化式を立式することが問題であり，漸化式自体はそこまで高難度にならないことが多い気がします．

確率漸化式の場合，$n+1$ 回目の結果はたかだかその直前の n 回目の結果からしか影響を受けない (問題によっては $n-1$ 回目も) ことにより，漸化式を立式します．このことを大学で学ぶ確率論における用語で**マルコフ性**といい，これに着目します．$n+1$ 回目と n 回目の確率推移図 (遷移図) を書くとわかりやすいでしょう．

解答　(1) 1 回目に A から黒玉を取ればよいので，$\boldsymbol{a_1 = \dfrac{3}{4}}$

2 回目に A に赤玉があるためには，確率推移図を書くと

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \text{1 回目} & \text{2 回目} \\
\text{A に赤あり} & a_1 \arrow[r, "\frac{3}{4}"] & a_2 \\
\text{A に赤なし} & 1-a_1 \arrow[ur, "\frac{1}{5}"'] &
\end{tikzcd}
$$

となるので，$\boldsymbol{a_2} = \dfrac{3}{4}a_1 + \dfrac{1}{5}(1-a_1) \boldsymbol{= \dfrac{49}{80}}$

(2) n 回目と，$n+1$ 回目の推移図を書くと

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & n \text{ 回目} & n+1 \text{ 回目} \\
\text{A に赤あり} & a_n \arrow[r, "\frac{3}{4}"] & a_{n+1} \\
\text{A に赤なし} & 1-a_n \arrow[ur, "\frac{1}{5}"'] &
\end{tikzcd}
$$

となるので，$\boldsymbol{a_{n+1}} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{5}(1-a_n) \boldsymbol{= \dfrac{11}{20}a_n + \dfrac{1}{5}}$

(3) (2) の式を

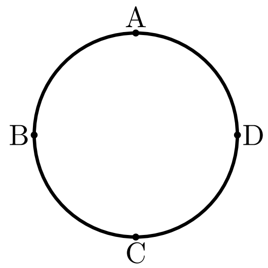
$$a_{n+1}-\frac{4}{9}=\frac{11}{20}\left(a_n-\frac{4}{9}\right)$$

を変形すれば，$\left\{a_n-\dfrac{4}{9}\right\}$ の一般項は

$$a_n-\frac{4}{9}=\left(a_1-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}=\frac{11}{36}\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n=\frac{11}{36}\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}+\frac{4}{9}}$$

類題 15　右図のような円周上の 4 点 A，B，C，D の上を次の規則で反時計まわりに動く点 Q を考える．さいころを振って偶数の目が出れば出た目の数だけ順次隣の点に移動させ，奇数の目が出れば移動させない．



また，Q は最初 A 上にあったものとする．さいころを n 回振った後で Q が C 上にある確率を p_n とおくとき，

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} と p_n との間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) p_n を n の式で表せ．

(広島大)

類題 16　四面体 $A_1A_2A_3A_4$ の頂点から頂点に動く点 Q がある．1 つのさいころを投げ，出た目に応じて Q は次のルールにしたがって動く．

ルール：さいころを投げる前，Q は A_k にあるとする．さいころを投げたとき，出た目 l が k，5，6 のいずれにも等しくなければ Q は A_l に動き，l が k，5，6 のいずれかに等しければ Q は A_k にとどまる．

最初 Q は A_1 にあるとする．さいころを n 回投げたとき，Q が A_1 にある確率を p_n とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n の式で表せ．

(3) p_n を求めよ．

(山口大)

7　類題の解答

類題 1

(1) $\boldsymbol{a_n} = 4+(n-1)6 \boldsymbol{= 6n-2}$

(2) $\boldsymbol{a_n} = 7+(n-1)(-4) \boldsymbol{= -4n+11}$

(3) $\boldsymbol{a_n} = a_3+(n-3)d$

$$= 8+(n-3)\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{= -\frac{1}{3}n+9}$$

補足　(3) では a_1 を出していては時間の無駄. p6 の公式集にある公式はこうやって使います.

類題 2

(1) $\boldsymbol{a_n = 3\cdot 2^{n-1}}$

(2) $\boldsymbol{a_n} = 10\cdot 5^{n-1} \boldsymbol{= 2\cdot 5^n}$

(3) $\boldsymbol{a_n} = a_3\cdot r^{n-3}$

$$\boldsymbol{= 6\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3}}$$

補足　(3) では類題 1 の (3) と同じく a_1 を出していては時間の無駄.

類題 3

(1) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$= 1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= n^2-n+1$$

$a_1 = 1^2-1+1 = 1$ より $n=1$ のときも成り立つ.

$$\therefore \boldsymbol{a_n = n^2-n+1}$$

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 2+\sum_{k=1}^{n-1}(-12k^2+4)$$

$$= 2-12\cdot\frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\}+4(n-1)$$

$$= -4n^3+6n^2+2n-2$$

$a_1 = -4+6+2-2 = 2$ より $n=1$ のときも成り立つ.

$$\therefore \boldsymbol{a_n = -4n^3+6n^2+2n-2}$$

(3) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-3k)$$

$$= 1+\frac{2-2^{n-1}\cdot 2}{1-2}-3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= 2^n-\frac{3}{2}(n-1)n-1$$

$a_1 = 2^1-1 = 1$ より $n=1$ のときも成り立つ.

$$\therefore \boldsymbol{a_n = 2^n-\frac{3}{2}(n-1)n-1}$$

類題 4

(1) 特　$\alpha = 6\alpha-15$　$\therefore \alpha = 3$

与式を $a_{n+1}-3 = 6(a_n-3)$ と変形すると,

$$a_n-3 = (a_1-3)6^{n-1}$$

$$= -6^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n = -6^{n-1}+3}$$

(2) 特　$\alpha = 2\alpha+9$　$\therefore \alpha = -9$

与式を $a_{n+1}+9 = 2(a_n+9)$ と変形すると,

$$a_n+9 = (a_1+9)2^{n-1}$$

$$= 6\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n = 3\cdot 2^n-9}$$

(3) $a_{n+1} = \dfrac{3}{5}a_n+\dfrac{8}{5}$ とする.

特　$5\alpha = 3\alpha+8$　$\therefore \alpha = 4$

与式を $a_{n+1}-4 = \dfrac{3}{5}(a_n-4)$ と変形すると,

$$a_n-4 = (a_1-4)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$= -5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n = -5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+4}$$

類題 5

(1) 両辺 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$$

ここで，$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3},\ b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 2$$

ここでこの式を

$$b_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(b_n - 1)$$

と変形すると

$$b_n - 1 = (b_1 - 1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \boldsymbol{a_n} &= 3^n b_n \\ &= 3^n\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1\right\} \\ &\boldsymbol{= 3\cdot 2^{n-1} + 3^n}\end{aligned}$$

(2) 両辺 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{5}{3}$$

ここで，$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと

$$b_{n+1} = b_n + \frac{5}{3},\ b_1 = \frac{a_1}{3^1} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore b_n = \frac{5}{3} + (n-1)\frac{5}{3} = \frac{5}{3}n$$

$$\begin{aligned}\therefore \boldsymbol{a_n} &= 3^n b_n \\ &= 3^n\cdot\frac{5}{3}n \\ &\boldsymbol{= 5n\cdot 3^{n-1}}\end{aligned}$$

(3) 両辺 3^{n+1} かけると

$$9\cdot 3^{n+1}a_{n+1} = 3\cdot 3^n a_n + 12$$

$$\Longleftrightarrow 3\cdot 3^{n+1}a_{n+1} = 3^n a_n + 4$$

ここで，$b_n = 3^n a_n$ とおくと

$$3b_{n+1} = b_n + 4$$

$$\Longleftrightarrow b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{4}{3},\ b_1 = 3^1 a_1 = -90$$

ここでこの式を

$$b_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(b_n - 2)$$

と変形すると

$$b_n - 2 = (b_1 - 2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -92\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = -92\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \boldsymbol{a_n} &= \frac{b_n}{3^n} \\ &= \frac{1}{3^n}\left\{-92\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2\right\} \\ &\boldsymbol{= -\frac{92}{3^{2n-1}} + \frac{2}{3^n}}\end{aligned}$$

類題 6

(1) 漸化式の形から $a_n > 0$，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n + 3}{a_n} = \frac{3}{a_n} + 4$$

ここで，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと

$$b_{n+1} = 3b_n + 4,\ b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$$

ここでこの式を

$$b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2)$$

と変形すると

$$b_n + 2 = (b_1 + 2)3^{n-1} = 3^n$$

$$\therefore b_n = 3^n - 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \boldsymbol{a_n} &= \frac{1}{b_n} \\ &\boldsymbol{= \frac{1}{3^n - 2}}\end{aligned}$$

(2) 漸化式の形から $a_n > 0$，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2 - a_n}{a_n} = \frac{2}{a_n} - 1$$

ここで，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと

$$b_{n+1} = 2b_n - 1,\ b_1 = \frac{1}{a_1} = 2$$

ここでこの式を

$$b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$$

と変形すると

$$b_n - 1 = (b_1 - 1)2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore b_n = 2^{n-1} + 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \boldsymbol{a_n} &= \frac{1}{b_n} \\ &\boldsymbol{= \frac{1}{2^{n-1} + 1}}\end{aligned}$$

(3) 漸化式の形から $a_n > 0$，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{na_n + 1}{a_n} = \frac{1}{a_n} + n$$

ここで，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n+n,\ b_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}$$

$b_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ より $n=1$ のときも成り立つ.

$$\therefore b_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n}=\frac{1}{b_n}$$

$$\boldsymbol{=\frac{6}{3n^2-3n+2}}$$

類題 7

(1) 与式を $a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$ とおくと

$$a_{n+1}=2a_n+\alpha n-\alpha+\beta$$

これを与式と比較すると

$$\begin{cases}\alpha=1\\ -\alpha+\beta=-1\end{cases}\qquad \therefore \alpha=1,\ \beta=0$$

つまり与式を $a_{n+1}+(n+1)=2(a_n+n)$ と変形できたので

$$a_n+n=(a_1+1)2^{n-1}=2^n$$

$$\boldsymbol{\therefore a_n=2^n-n}$$

(2) 与式を $a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=\frac{1}{2}(a_n+\alpha n+\beta)$ とおくと

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}\alpha n-\alpha-\frac{1}{2}\beta$$

これを与式と比較すると

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\alpha=1\\ -\alpha-\frac{1}{2}\beta=0\end{cases}\qquad \therefore \alpha=-2,\ \beta=4$$

つまり与式を

$$a_{n+1}-2(n+1)+4=\frac{1}{2}(a_n-2n+4)$$

と変形できたので

$$a_n-2n+4=(a_1-2+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$\boldsymbol{\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+2n-4}$$

(3) 与式を

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma$$
$$=2(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma)$$

とおくと

$$a_{n+1}=2a_n+\alpha n^2+(-2\alpha+\beta)n-\alpha-\beta+\gamma$$

これを与式と比較すると

$$\begin{cases}\alpha=-1\\ -2\alpha+\beta=2\\ -\alpha-\beta+\gamma=0\end{cases}$$

$$\therefore \alpha=-1,\ \beta=0,\ \gamma=-1$$

つまり与式を $a_{n+1}-(n+1)^2-1=2(a_n-n^2-1)$ と変形できたので

$$a_n-n^2-1=(a_1-1^2-1)2^{n-1}=-2^{n-1}$$

$$\boldsymbol{\therefore a_n=-2^{n-1}+n^2+1}$$

類題 8

(1) 両辺 $n(n+1)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a_n}{n}$$

$$\therefore \frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\boldsymbol{\therefore a_n=2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

(2) 両辺 $n+1$ をかけると

$$(n+2)(n+1)a_n=7(n+1)na_n$$

ここで $b_n=(n+1)na_n$ とおくと

$$b_{n+1}=7b_n,\ b_1=2\cdot1\cdot a_1=7$$

$$\therefore b_n=7\cdot7^{n-1}=7^n$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n}=\frac{b_n}{n(n+1)}$$

$$\boldsymbol{=\frac{7^n}{n(n+1)}}$$

(3) 両辺 $(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ここで $b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)},\ b_1=\frac{a_1}{1\cdot 2}=1$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\\&\qquad+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{3n+1}{2(n+1)}\end{aligned}$$

$b_1=\dfrac{3+1}{2\cdot 2}=1$ より，$n=1$ のときも成り立つ．

$$\therefore b_n=\frac{3n+1}{2(n+1)}$$

$$\begin{aligned}\therefore \boldsymbol{a_n}&=n(n+1)b_n\\&\boldsymbol{=\frac{n(3n+1)}{2}}\end{aligned}$$

類題 9

(1) 両辺 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n^2=2\log_2 a_n$$

ここで $b_n=\log_2 a_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=2b_n,\ b_1=\log_2 a_1=1$$

$$\therefore b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n}=2^{b_n}\ \boldsymbol{=2^{2^{n-1}}}$$

(2) 両辺 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 16a_n^5=5\log_2 a_n+4$$

ここで $b_n=\log_2 a_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=5b_n+4,\ b_1=\log_2 a_1=1$$

ここでこの式を

$$b_{n+1}+1=5(b_n+1)$$

と変形すると

$$b_n+1=(b_1+1)5^{n-1}=2\cdot 5^{n-1}$$

$$\therefore b_n=2\cdot 5^{n-1}-1$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n}=2^{b_n}\ \boldsymbol{=2^{2\cdot 5^{n-1}-1}}$$

(3) 両辺 3 を底とする対数をとると

$$\log_3 a_{n+1}=\log_3 3^n a_n^2=2\log_3 a_n+n$$

ここで $b_n=\log_3 a_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=2b_n+n\ \cdots①,\ b_1=\log_3 a_1=2$$

この式を $b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(b_n+\alpha n+\beta)$ とおくと

$$b_{n+1}=2b_n+\alpha n-\alpha+\beta$$

これを①と比較すると

$$\begin{cases}\alpha=1\\-\alpha+\beta=0\end{cases}\qquad \therefore \alpha=1,\ \beta=1$$

つまり $b_{n+1}+(n+1)+1=2(b_n+n+1)$ と変形できたので

$$b_n+n+1=(b_1+1+1)2^{n-1}=2^{n+1}$$

$$\therefore b_n=2^{n+1}-n-1$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n}=3^{b_n}\ \boldsymbol{=3^{2^{n+1}-n-1}}$$

類題 10

(1) 特　$\alpha=\dfrac{3\alpha+2}{\alpha+4}\iff \alpha^2+\alpha-2=0$

$$\iff \alpha=-2,\ 1$$

よって $b_n=\dfrac{a_n+2}{a_n-1}$ とおくと，$b_1=\dfrac{a_1+2}{a_1-1}=4$

$\left(※\ b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+2}\text{でもよい}\right)$

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\frac{a_{n+1}+2}{a_{n+1}-1}\\&=\frac{\dfrac{3a_n+2}{a_n+4}+2}{\dfrac{3a_n+2}{a_n+4}-1}\\&=\frac{3a_n+2+2a_n+8}{3a_n+2-(a_n+4)}\\&=\frac{5a_n+10}{2a_n-2}\\&=\frac{5}{2}\cdot\frac{a_n+2}{a_n-1}\\&=\frac{5}{2}b_n\end{aligned}$$

$$\therefore b_n=4\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

また

$$(a_n-1)b_n=a_n+2$$

$$\iff (b_n-1)a_n = b_n+2$$

$$\iff \boldsymbol{a_n} = \frac{b_n+2}{b_n-1}$$

$$= \frac{4\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}+2}{4\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}$$

$$\boldsymbol{= \frac{4\cdot 5^{n-1}+2^n}{4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}}}$$

(2) 特 $\alpha = \dfrac{3\alpha-4}{\alpha-1} \iff \alpha^2-4\alpha+4=0$

$$\iff \alpha = 2$$

よって $b_n = a_n - 2$ とおくと，$b_1 = a_1 - 2 = 1$

$$b_{n+1} = a_{n+1}-2 = \frac{3a_n-4}{a_n-1}-2 = \frac{3a_n-4-2(a_n-1)}{a_n-1} = \frac{a_n-2}{a_n-2+1} = \frac{b_n}{b_n+1}$$

漸化式の形から $b_n > 0$，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{b_n+1}{b_n} = \frac{1}{b_n}+1$$

ここで $c_n = \dfrac{1}{b_n}$ とおくと

$$c_{n+1} = c_n+1,\ c_1 = \frac{1}{b_1} = 1$$

$$\therefore c_n = 1+(n-1)\cdot 1 = n$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{c_n} = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n} = b_n + 2 \boldsymbol{= \frac{1}{n}+2}$$

類題 11

(1) 特 $\alpha^2 = 3\alpha - 2 \iff \alpha = 1,\ 2$ より与式を

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1} = 2(a_{n+1}-a_n) \\ a_{n+2}-2a_{n+1} = a_{n+1}-2a_n \end{cases}$$

と変形すると，$\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=2$，公比 2 の，$\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=-1$，公比 1 の等比数列となるので，それぞれの一般項は

$$\begin{cases} a_{n+1}-a_n = 2\cdot 2^{n-1} = 2^n \\ a_{n+1}-2a_n = -1^{n-1} = -1 \end{cases}$$

となる．辺々引くと

$$\boldsymbol{a_n = 2^n+1}$$

(2) 特 $\alpha^2-6\alpha+9=0 \iff \alpha=3$ より与式を

$$a_{n+2}-3a_{n+1} = 3(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形すると $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=3$，公比 3 の等比数列となるので，

$$a_{n+1}-3a_n = 3\cdot 3^{n-1} = 3^n$$

$$\iff a_{n+1} = 3a_n+3^n$$

となる．両辺 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$$

ここで $b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと

$$b_{n+1} = b_n+\frac{1}{3},\ b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 0$$

$$\therefore b_n = 0+(n-1)\frac{1}{3} = \frac{n-1}{3}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n} = 3^n b_n \boldsymbol{= (n-1)3^{n-1}}$$

(3) 特 $\alpha^2 = \alpha+1$ の解を，$\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ として与式を

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha_1 a_{n+1} = \alpha_2(a_{n+1}-\alpha_1 a_n) \\ a_{n+2}-\alpha_2 a_{n+1} = \alpha_1(a_{n+1}-\alpha_2 a_n) \end{cases}$$

と変形すると，$\{a_{n+1}-\alpha_1 a_n\}$ は初項 $a_2-\alpha_1 a_1 = 1-\alpha_1$，公比 α_2 の，$\{a_{n+1}-\alpha_2 a_n\}$ は初項 $a_2-\alpha_2 a_1 = 1-\alpha_2$，公比 α_1 の等比数列となるので，それぞれの一般項は

$$\begin{cases} a_{n+1}-\alpha_1 a_n = (1-\alpha_1)\alpha_2^{n-1} \\ a_{n+1}-\alpha_2 a_n = (1-\alpha_2)\alpha_1^{n-1} \end{cases}$$

となる．辺々引くと

$$(\alpha_2-\alpha_1)a_n = \left\{(1-\alpha_1)\alpha_2^{n-1}-(1-\alpha_2)\alpha_1^{n-1}\right\}$$

ここで，$\alpha_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\alpha_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ として

$$\sqrt{5}a_n = \left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$

類題 12

(1) 特　$\alpha^2=\alpha+2 \iff \alpha=-1,\ 2$ より与式を

$$\begin{cases} a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)+2 \\ a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)+2 \end{cases}$$

と変形する．$b_n=a_{n+1}+a_n$，$c_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+1}=2b_n+2 \quad b_1=a_2+a_1=3 \\ c_{n+1}=-c_n+2 \quad c_1=a_2-2a_1=0 \end{cases}$$

上の式を

$$\begin{cases} b_{n+1}+2=2(b_n+2) \\ c_{n+1}-1=-(c_n-1) \end{cases}$$

と変形すると

$$\begin{cases} b_n+2=(b_1+2)2^{n-1}=5\cdot 2^{n-1} \\ c_n-1=(c_1-1)(-1)^{n-1}=-(-1)^{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b_n=a_{n+1}+a_n=5\cdot 2^{n-1}-2 \\ c_n=a_{n+1}-2a_n=-(-1)^{n-1}+1 \end{cases}$$

辺々引くと

$$3a_n=5\cdot 2^{n-1}+(-1)^{n-1}-3$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n=\frac{5\cdot 2^{n-1}+(-1)^{n-1}}{3}-1}$$

(2) 特　$\alpha^2=2\alpha-1 \iff \alpha=1$ より与式を

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+6$$

と変形する．$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n+6,\ b_1=a_2-a_1=1$$

$$\therefore b_n=a_{n+1}-a_n=1+(n-1)6=6n-5$$

$$\therefore a_{n+1}=a_n+6n-5$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-5) \\ &= 1+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-5(n-1) \\ &= 3n^2-8n+6 \end{aligned}$$

$a_1=3-8+6=1$ より，$n=1$ のときも成り立つ．

$$\therefore \boldsymbol{a_n=3n^2-8n+6}$$

類題 13

(1) $n=1$ を代入して $S_1=a_1=3a_1+2+1 \iff a_1=-\dfrac{3}{2}$ を得る．

与式の n のナンバリングを上にずらして与式と辺々引くと

$$\begin{array}{rl} & S_{n+1}=3a_{n+1}+2(n+1)+1 \\ -) & S_n=3a_n+2n+1 \\ \hline & a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n+2 \end{array}$$

整理すると

$$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n-1$$

$$\iff a_{n+1}-2=\frac{3}{2}(a_n-2)$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n-2 &= (a_1-2)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{7}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n=-\frac{7}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+2}$$

(2) 与式の n のナンバリングを上にずらして与式と辺々引くと

$$\begin{array}{rl} & n^2a_{n+1}=S_{n+1} \\ -) & (n-1)^2a_n=S_n \\ \hline & n^2a_{n+1}-(n-1)^2a_n=a_{n+1} \end{array}$$

$$\iff (n^2-1)a_{n+1}=(n-1)^2a_n$$

$n \geqq 2$ のとき，$(n-1)$ で割ると

$$(n+1)a_{n+1}=(n-1)a_n$$

$$\iff n(n+1)a_{n+1}=(n-1)na_n$$

ここで $b_n=(n-1)na_n$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n=\cdots=b_2=1\cdot 2a_2=2$$

$$\therefore b_n=(n-1)na_n=2$$

$$\therefore a_n=\frac{2}{(n-1)n} \quad (n \geqq 2)$$

$n=1$ のときとまとめると

$$\boldsymbol{a_n=\begin{cases} 0 & (n=1) \\ \dfrac{2}{(n-1)n} & (n \geqq 2) \end{cases}}$$

補足　S_n の問題では，a_n の一般項を一括りにできない場合もよくあります．

類題 14

(1) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)\cdots$ ① とおくと

$$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=a_n+3b_n+\alpha(3a_n+b_n)$$
$$=(1+3\alpha)a_n+(3+\alpha)b_n$$

①の右辺と係数比較すると

$$\begin{cases}\beta=1+3\alpha\\ \beta\alpha=3+\alpha\end{cases}$$

となるから

$$(1+3\alpha)\alpha=3+\alpha$$
$$\therefore(\alpha,\beta)=(-1,-2),\ (1,4)$$

より与式を

$$\begin{cases}a_{n+1}-b_{n+1}=-2(a_n-b_n)\\ a_{n+1}+b_{n+1}=4\,(a_n+b_n)\end{cases}\quad\cdots ②$$

と変形できるから，$\{a_n-b_n\}$，$\{a_n+b_n\}$ の一般項は

$$\begin{cases}a_n-b_n=(a_1-b_1)(-2)^{n-1}=3(-2)^{n-1}\\ a_n+b_n=(a_1+b_1)\,4^{n-1}=5\cdot4^{n-1}\end{cases}$$

辺々足すと

$$2a_n=3(-2)^{n-1}+5\cdot4^{n-1}$$
$$\therefore \boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}\left\{3(-2)^{n-1}+5\cdot4^{n-1}\right\}}$$

辺々引くと

$$-2b_n=3(-2)^{n-1}-5\cdot4^{n-1}$$
$$\therefore \boldsymbol{b_n=\frac{1}{2}\left\{5\cdot4^{n-1}-3(-2)^{n-1}\right\}}$$

補足　この問題のように漸化式の係数が対称になっていることは多く，そのときは与式を辺々足したり引いたりすれば早く解決．つまり，気がつけばいきなり②を書いて大丈夫です．

(2) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)\cdots$ ① とおくと

$$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=2a_n-b_n+\alpha(a_n+4b_n)$$
$$=(2+\alpha)a_n+(-1+4\alpha)b_n$$

①の右辺と係数比較すると

$$\begin{cases}\beta=2+\alpha\\ \beta\alpha=-1+4\alpha\end{cases}$$

となるから

$$(2+\alpha)\alpha=-1+4\alpha$$
$$\therefore(\alpha,\beta)=(1,3)$$

より与式を

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$$

と変形できるから，$\{a_n+b_n\}$ の一般項は

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)3^{n-1}=3\cdot3^{n-1}=3^n$$

与式に戻すと

$$a_{n+1}=2a_n+a_n-3^n=3a_n-3^n$$

両辺 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{3}$$

これより

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{a_1}{3^1}+(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}$$
$$\therefore \boldsymbol{a_n}=\left(-\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}\right)3^n$$
$$\boldsymbol{=(-n+2)3^{n-1}}$$
$$\therefore \boldsymbol{b_n}=3^n-a_n$$
$$=\left(\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}\right)3^n$$
$$\boldsymbol{=(n+1)3^{n-1}}$$

補足　α が重解になるタイプ．落ち着いて隣接 2 項間の問題に落とし込みましょう．

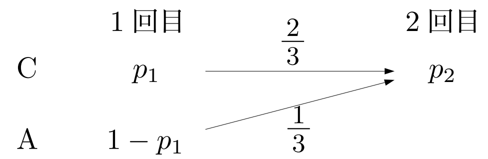
類題 15

(1) まず動点 Q は点 B，D に止まることはない．

p_1 は 1 回で A から C へ移動する確率である．2 か 4 が出ればよいので

$$\boldsymbol{p_1}=\frac{2}{6}\boldsymbol{=\frac{1}{3}}$$

2 回目で C にいるためには，1 回目で A にいる場合と C にいる場合がある．確率推移図を書くと



となるので

$$\boldsymbol{p_2}=\frac{2}{3}p_1+\frac{1}{3}(1-p_1)\boldsymbol{=\frac{4}{9}}$$

(2) $n+1$ 回目で C にいるためには，n 回目で A にいる場合と C にいる場合がある．確率推移図を

書くと

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & n\text{ 回目} & & n+1\text{ 回目} \\
\mathrm{C} & p_n \arrow[rr, "\frac{2}{3}"] & & p_{n+1} \\
\mathrm{A} & 1-p_n \arrow[rru, "\frac{1}{3}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

となるので

$$\boldsymbol{p_{n+1}} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) \boldsymbol{= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}}$$

(3) (2) の式を

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

と変形すると

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{p_n} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{1}{2}}$$

類題 16

(1) 1 回目に Q が A_1 にあるためには，さいころで 1，5，6 を出せばいいので

$$\boldsymbol{p_1} = \frac{3}{6} \boldsymbol{= \frac{1}{2}}$$

2 回目に Q が A_1 にいるためには，1 回目で Q が A_1 にいる場合と A_1 以外にいる場合がある．確率推移図を書くと

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 1\text{ 回目} & & 2\text{ 回目} \\
\mathrm{A}_1 & p_1 \arrow[rr, "\frac{1}{2}"] & & p_2 \\
\mathrm{A}_1\text{ 以外} & 1-p_1 \arrow[rru, "\frac{1}{6}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

となるので

$$\boldsymbol{p_2} = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{6}(1-p_1) \boldsymbol{= \frac{1}{3}}$$

(2) $n+1$ 回目で Q が A_1 にいるためには，n 回目で Q が A_1 にいる場合と A_1 以外にいる場合がある．確率推移図を書くと

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & n\text{ 回目} & & n+1\text{ 回目} \\
\mathrm{A}_1 & p_n \arrow[rr, "\frac{1}{2}"] & & p_{n+1} \\
\mathrm{A}_1\text{ 以外} & 1-p_n \arrow[rru, "\frac{1}{6}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

となるので

$$\boldsymbol{p_{n+1}} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}(1-p_n) \boldsymbol{= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}}$$

(3) (2) の式を

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

と変形すると

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(p_1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{p_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}}$$

著：平岡晃
初版：2015 年 9 月 30 日
第 2 版：2015 年 10 月 10 日
第 3 版：2016 年 1 月 24 日
第 4 版：2016 年 9 月 18 日
第 5 版：2017 年 9 月 28 日
第 6 版：2019 年 2 月 1 日