2023 早稲田大（理工）

[I]

$(3x+2)^n = (x^2+x+1)Q(x) + a_n x + b_n$

とおく.

(1) $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\overline{\omega} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ とする.

$(3\omega+2)^n = a_n\omega + b_n$

$a_{n+1}\omega + b_{n+1} = (3\omega+2)^{n+1}$

$= (a_n\omega + b_n)(3\omega+2)$

$= 3a_n\omega^2 \leftarrow \overline{\omega}$

$+ (2a_n+3b_n)\omega$

$+ 2b_n$

（左辺）

$= a_{n+1}\cdot\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} + b_{n+1}$

$= -\dfrac{1}{2}a_{n+1} + b_{n+1} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1} i$

（右辺）

$= 3a_n\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} + (2a_n+3b_n)\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} + 2b_n$

$= -\dfrac{1}{2}(5a_n+3b_n) + 2b_n$

$+ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(-a_n+3b_n)i$

比較して

$$\begin{cases} \underline{a_{n+1} = -a_n + 3b_n} \\ -\dfrac{1}{2}a_{n+1} + b_{n+1} = -\dfrac{5}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n \end{cases}$$

↓

b_{n+1}

$= \dfrac{1}{2}(-a_n+3b_n) - \dfrac{5}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$

$\underline{= -3a_n + 2b_n}$

$a_1 = 3 \quad b_1 = 2$

$a_2 = 3 \quad b_2 = -5$

$a_3 = -18 \quad b_3 = -19$

⋮

$a_n = 7\alpha + 3,\ b_n = 7\beta + 2$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{Z})$ と表せると推測.

これが正しいことを示す.

(i) $n=1$ のとき成立.

(ii) $n=k$ のとき

$a_k = 7\alpha_k + 3,\ b_k = 7\beta_k + 2$

と表せると仮定.

$n=k+1$ のとき

$a_{k+1} = -7\alpha_k - 3 + 3(7\beta_k + 2)$

$= 7(-\alpha_k + 3\beta_k) + 3$

$b_{k+1} = -3(7\alpha_k + 3) + 2(7\beta_k + 2)$

$= 7(-3\alpha_k + 2\beta_k - 1) + 2$

よりこのときも成立.

(i)(ii)よりすべての自然数において成立するので, a_n, b_n は7の倍数でない.

(3)

$2a_{n+1} = -2a_n + 6b_n$

$-)\ 3b_{n+1} = -9a_n + 6b_n$

$2a_{n+1} - 3b_{n+1} = 7a_n$

$\therefore a_n = \dfrac{2}{7}a_{n+1} - \dfrac{3}{7}b_{n+1}$

$3a_{n+1} = -3a_n + 9b_n$

$-)\ b_{n+1} = -3a_n + 2b_n$

$3a_{n+1} - b_{n+1} = 7b_n$

$\therefore b_n = \dfrac{3}{7}a_{n+1} - \dfrac{1}{7}b_{n+1}$

a_m と b_m が互いに素でないような $m\ (m \geqq 2)$ が存在するとする.

$a_m = gp,\ b_m = gq$

（g は2以上の整数, $p, q \in \mathbb{Z}$）

とする.

$a_{m-1} = \dfrac{2gp - 3gq}{7}$

$= \dfrac{g(2p-3q)}{7}$

$b_{m-1} = \dfrac{3gp - gq}{7}$

$= \dfrac{g(3p-q)}{7}$

(2)より g は7の倍数でないので $2p-3q$, $3p-q$ は7の倍数.

a_{m-1}, b_{m-1} がどちらも g の倍数より a_{m-1}, b_{m-1} も互いに素でない.

これを繰り返すと a_1, b_1 も互いに素でないが, これらは互いに素なので矛盾.

以上より最初の仮定が誤りより a_n と b_n はすべての n で互いに素.

[II]

(1)

$P_1(k)\ (k=0,1)$

$= {}_1C_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{1-k}$

$= \frac{1}{k!(1-k)!}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$ #

$P_2(0)$

$= \underset{黒\to黒}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$

$P_2(1)$

$= \underset{黒\to赤}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} + \underset{赤\to黒}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

$P_2(2)$

$= \underset{赤\to赤}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$

$\therefore P_2(k) = \underline{\frac{1}{3}}$ # $(k=0,1,2)$

$P_n(k) = \frac{1}{n+1}$ となることを数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$のとき成立

(ii) $n=m$のとき成り立つと仮定する.

$n=m+1$のとき

$P_{m+1}(k)\ (k=1,2,\cdots,m)$

$= P_m(k)\cdot\frac{m-k+1}{m+2} + P_m(k-1)\cdot\frac{k}{m+2}$

$= \frac{1}{m+1}\left(\frac{m-k+1}{m+2} + \frac{k}{m+2}\right)$

$= \frac{1}{m+2}$

$P_{m+1}(0)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{m+1}{m+2}$

$= \frac{1}{m+2}$

$P_{m+1}(m+1)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{m+1}{m+2}$

$= \frac{1}{m+2}$

よりこのときも成立.

(i)(ii)よりすべてのnにおいて

$P_n(k) = \underline{\frac{1}{n+1}}$ #

(2)

$Q_1(1) = \frac{r}{r+b}$

$Q_2(1) = \frac{r}{r+b}\cdot\frac{b}{r+b+1}$

$Q_2(2) = \frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b+1}$

$Q_3(1) = \frac{r}{r+b}\cdot\frac{b}{r+b+1}\cdot\frac{b+1}{r+b+2}$

$\vdots$

$Q_n(k) = \frac{r\cdot b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-2)}{(r+b)(r+b+1)\cdots(r+b+n-1)}$ $(n\geq 2)$

となることを数学的帰納法で示す.

(i) $n=2$のとき成立.

(ii) $n=l$のとき成り立つと仮定する.

$n=l+1$のとき

$Q_{l+1}(k)$

$= Q_l(k)\cdot\frac{b+l-1}{r+b+l}$

$= \frac{r\cdot b\cdot(b+1)\cdots(b+l-1)}{(r+b)(r+b+1)\cdots(r+b+l)}$

$Q_{l+1}(l+1)$

$= \frac{b(b+1)\cdots(b+l-1)r}{(r+b)(r+b+1)\cdots(r+b+l)}$

よりこのときも成立.

(i)(ii)より $n\geq 2$で成立.

$n=1$のとき $Q_1(1) = \frac{r}{r+b}$

よりすべてのnにおいて$Q_n(k)$はkによらない.

[III] (1)

$y = e^{x-2} = f(x)$

逆関数は

$x = e^{y-2}$

$\Leftrightarrow \log x = y-2$

$\Leftrightarrow y = \log x + 2 = g(x)$

(2)

$h(x) = e^{x-2} - x$ とおく

$h'(x) = e^{x-2} - 1$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$

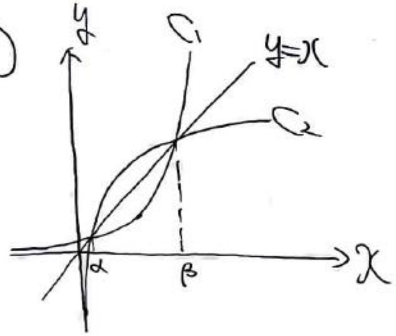
$h(4) = e^2 - 4$

$> 2^2 - 4$

$= 0$

以上より $x<2$ と $2<x<4$ に それぞれ1こずつ交点をもつ.

(3)



(4)

求める面積は

$2\int_\alpha^\beta (x-e^{x-2})dx$

$=\left[x^2-2e^{x-2}\right]_\alpha^\beta$

$=\beta^2-2e^{\beta-2}-\alpha^2+2e^{\alpha-2}$

$=\beta^2-2\beta-\alpha^2+2\alpha$ //

[IV]

(1) $z=1$ のとき $w=3$ //

$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき

$w=3\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$ //

$z=\sqrt{3}i$ のとき

$w=\frac{\sqrt{3}}{i}=-\sqrt{3}i$ //

(2)

αz

$=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3}i)((1-t)+t\sqrt{3}i)$

$=\frac{1}{2}\{3(1-t)+3t\sqrt{3}i-\sqrt{3}(1-t)i+3t\}$

$=\frac{1}{2}\{3+(4t-1)\sqrt{3}i\}$

$\mathrm{Re}\,\alpha z=\frac{3}{2}$ //

$(w-\alpha)(\overline{w-\alpha})$

$=(w-\alpha)(\overline{w}-\overline{\alpha})$

$=\left(\frac{3}{\overline{z}}-\alpha\right)\left(\frac{3}{z}-\overline{\alpha}\right)$

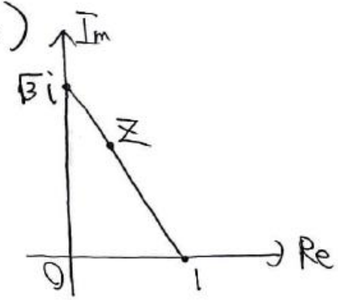
$=\left(\frac{9}{z\overline{z}}-\frac{3\overline{\alpha}}{\overline{z}}-\frac{3\alpha}{z}+\alpha\overline{\alpha}\right)$

$=\frac{9-3\overline{\alpha}z-3\alpha\overline{z}}{z\overline{z}}+|\alpha|^2$

$=0+3 \quad (\because \alpha z+\overline{\alpha z}=3)$

$=3$ //

(3)



$z=(1-t)+t\sqrt{3}i \quad (0\leqq t\leqq 1)$

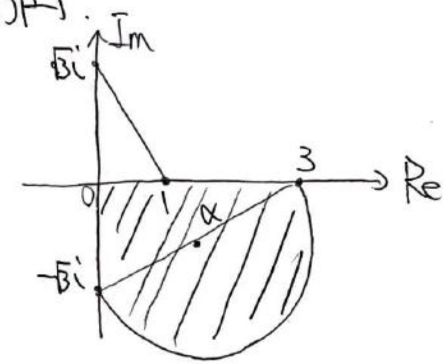
で

$(w-\alpha)(\overline{w-\alpha})$

$=|w-\alpha|^2=3$

より w は α を中心とした半径 $\sqrt{3}$

の円.



求める面積は斜線部分.

$\sqrt{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+(\sqrt{3})^2\pi\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{3\pi+3\sqrt{3}}{2}$ //

[V]

(1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix}$

$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$

$=\dfrac{0}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}}=0$

$\therefore \angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$ //

(2)

直線AB: $\begin{cases}x=-2t\\y=3+2t\\z=-2t\end{cases}$

$x=-2t=h \Leftrightarrow t=-\dfrac{h}{2}$

$P(h, 3-h, h)$ //

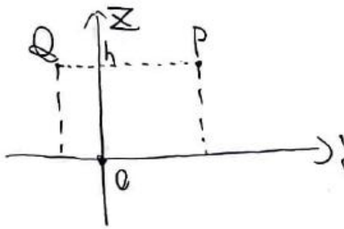
直線AC: $\begin{cases}x=-2t\\y=-3-4t\\z=-2t\end{cases}$

$Q(h, -3+2h, h)$ //

(3) $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}0\\-6+3h\\0\end{pmatrix}$

直線PQ: $\begin{cases}x=h\\y=3-h+(-6+3h)s\\z=h\end{cases}$

$x=h$において $-3+2h\leqq 0 \Leftrightarrow h\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき



線分PQでy座標が0のとき最小なので

(線分PQの折り) $=h$

$h>\dfrac{3}{2}$ のとき

(線分PQの折り) $=OQ$

$=\sqrt{(-3+2h)^2+h^2}$

$=\sqrt{5h^2-12h+9}$

以上より

(線分PQの折り)

$=\begin{cases}h & \left(0\leqq h\leqq\dfrac{3}{2}\right)\\ \sqrt{5h^2-12h+9} & \left(\dfrac{3}{2}<h\leqq 2\right)\end{cases}$ //

(4)

求める体積は

$\displaystyle\int_0^2\{\overline{OP}^2-(\text{線分PQの折り})^2\}\pi\,dh$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}(2h^2-6h+9-h^2)\pi\,dh$

$+\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2h^2-6h+9-5h^2+12h-9)\pi\,dh$

$=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}(h-3)^2dh$

$+\pi\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2}(-3h^2+6h)dh$

$=\cdots$

$=\dfrac{17}{2}\pi$ //