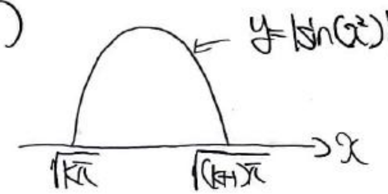
2023 東京大(理系)

第1問

(1)



$x^2 = t$ とおくと $2x\,dx = dt$.

A_k

$= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}\,dt$

$k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ で

$\frac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}} \leqq \frac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}$ …①

ここで

$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt$

$= \begin{cases} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin t\,dt & (k\text{は偶数}) \\ \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (-\sin t)\,dt & (k\text{は奇数}) \end{cases}$

$= 2$

①を $k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ で積分すると

$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$

(2)

$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$

$= \sum_{k=n}^{2n-1} A_k$

ここで

$\frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqq A_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$

$\frac{1}{\sqrt{(n+2)\pi}} \leqq A_{n+1} \leqq \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}$

⋮

$\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \leqq A_{2n-1} \leqq \frac{1}{\sqrt{(2n-1)\pi}}$

辺々たすと

$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \leqq \sum_{k=n}^{2n-1} A_k \leqq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\pi}}$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^2$

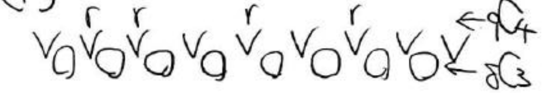
$= \frac{2\sqrt{2}-2}{\pi}$

同様に最右辺を $n\to\infty$ としても等しい.

$\therefore \lim_{n\to\infty} B_n = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{\pi}}$ //

第2問

(1)



$p = \frac{{}_9C_4 \cdot {}_8C_3}{\frac{12!}{3!4!5!}}$

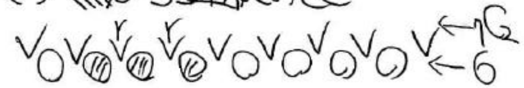
$= \frac{{}_9C_4 \cdot {}_8C_3}{{}_{12}C_3 \cdot {}_9C_4}$

$= \frac{8\cdot 7\cdot 6}{12\cdot 11\cdot 10} = \frac{14}{55}$ //

(2)

(1)の分子 ${}_9C_4 \cdot {}_8C_3$ 通りの中で場合分けする.

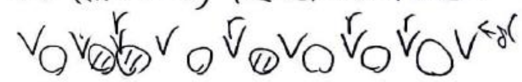
(i) 黒が3連続のとき



赤は上の場所は確定で残りから2つ選ぶ.

${}_7C_2 \cdot 6$ 通り

(ii) 黒が2コ, 1コと分けられるとき



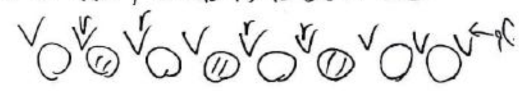
赤は ${}_8C_3$ 通り.

白と黒は

つまり

${}_8C_3 \cdot {}_6P_2$ 通り

(iii) 黒すべて隣りあわないとき



赤は ${}_9C_4$ 通り

白と黒は

つまり

${}_9C_4 \cdot {}_6C_3$ 通り

以上より

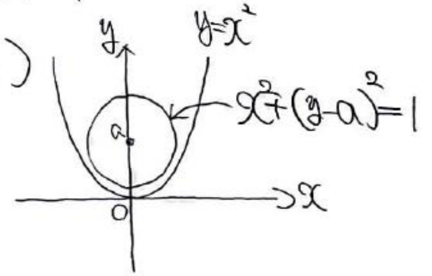
$q = \frac{{}_7C_2 \cdot 6 + {}_8C_3 \cdot {}_6P_2 \cdot {}_9C_4 \cdot {}_6C_3}{{}_9C_4 \cdot {}_8C_3}$

$= \cdots$

$= \frac{103}{168}$ //

第3問

(1)



連立すると

$y+(y-a)^2=1$

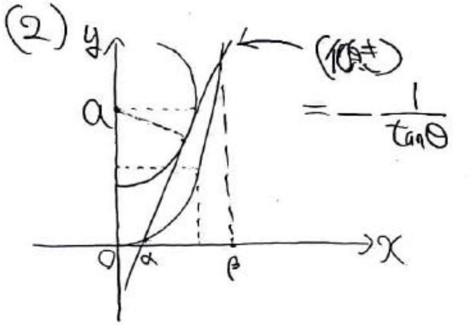
$\Leftrightarrow y^2+(1-2a)y+a^2-1=0$

$D=(1-2a)^2-4(a^2-1)$

$=-4a+5<0$

$\therefore \underline{a>\frac{5}{4}}$ //

(2)



$P(\cos\theta, \sin\theta+a)$ とする. $(-\frac{\pi}{2}<\theta<0)$

接線

$(\cos\theta)x+(\sin\theta)(y-a)=1$

↓ $y=x^2$ と連立

$(\sin\theta)x^2+(\cos\theta)x-a\sin\theta-1=0$

2解を α, β とおく

$\alpha+\beta=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}$

$\alpha\beta=-a-\frac{1}{\sin\theta}$

$(\beta-\alpha)^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\frac{1}{\tan^2\theta}+4a+\frac{4}{\sin\theta}$

$\therefore$

L_P

$=\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}}\sqrt{\frac{1}{\tan^2\theta}+4a+\frac{4}{\sin\theta}}$

$=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta\tan^2\theta}+\frac{4a}{\sin^2\theta}+\frac{4}{\sin^3\theta}}$

$=\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^4\theta}+\frac{4a}{\sin^2\theta}+\frac{4}{\sin^3\theta}}$

$=\sqrt{\frac{1}{\sin^4\theta}+\frac{4}{\sin^3\theta}+\frac{4a-1}{\sin^2\theta}}$

(ルートの中身) $t=\frac{1}{\sin\theta}$ とおく

$=t^4+4t^3+(4a-1)t^2=f(t)$ とおく.

$f'(t)$

$=4t^3+12t^2+(8a-2)t$

$=2t\{2t^2+6t+(4a-1)\}$

$=2t\{2(t+\frac{3}{2})^2+4a-\frac{11}{2}\}$

$t<0$ より $4a-\frac{11}{2}\geqq 0$ だと $f(t)$ が単調減少になり不適. $\therefore 4a-\frac{11}{2}<0$

$\therefore a<\frac{11}{8}$

(1)より $\underline{\frac{5}{4}<a<\frac{11}{8}}$ //

第4問

(1) $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OA}$ より $P(0,y,z)$ とおく.

$\begin{cases} \overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow y+z=0 \\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=1 \Leftrightarrow 2y+3z=1 \end{cases}$

$z=1,\ y=-1$

$\therefore \underline{P(0,-1,1)}$ //

(2)

$\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$ とおく.

$=\begin{pmatrix} 2t+1-t \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t+1 \\ -t+1 \\ -t+1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\begin{pmatrix} t+1 \\ -t+1 \\ -t+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

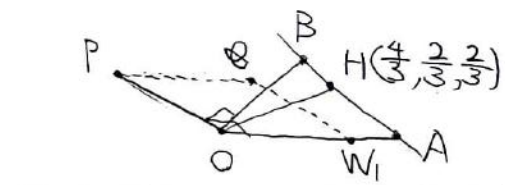
$=-3t+1=0 \quad \therefore t=\frac{1}{3}$

$\underline{\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}}$ //

(3)

$\overrightarrow{OQ}$

$=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Pから平面OABにおろした垂線の足はO. $\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}$ よりQから平面OAB,つまり平面OHBにおろした垂線の足は線分OAを3:1に内分した点. この点をW_1とする.

$|\overrightarrow{QO}| = \sqrt{\frac{9}{4}+1+1} = \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{153}}{6}$

$|\overrightarrow{QH}| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{100}{36}+\frac{4}{36}}$

$= \frac{\sqrt{105}}{6}$

$|\overrightarrow{QB}| = \sqrt{\frac{1}{4}+4+0} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

Qから線分OHにおろした垂線の足をW_2とする.

$\overrightarrow{OW_2} = \alpha\overrightarrow{OH}$ とおく.

$\overrightarrow{QW_2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\alpha-\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}\alpha+1 \\ \frac{2}{3}\alpha-1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QW_2}\cdot\overrightarrow{OH}$

$= \frac{16}{9}\alpha - 2 + \frac{4}{9}\alpha + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{3}$

$= \frac{24}{9}\alpha - 2 = 0$

$\alpha = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$W_2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$|\overrightarrow{QW_2}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$

以上より求めるrの最小値は

$|\overrightarrow{QW_2}|$で,最大値は

$|\overrightarrow{QO}| = |\overrightarrow{QB}| = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

$\therefore \frac{\sqrt{11}}{2} \leqq r \leqq \frac{\sqrt{17}}{2}$

第5問 (1)

$g(x) = f(x)Q_1(x) + r(x)$ とおく.

$g(x)^7$

$= \{f(x)Q_1(x) + r(x)\}^7$

$= \sum_{r=0}^{7} {}_7C_r \{f(x)Q_1(x)\}^{7-r} \cdot \{r(x)\}^r$

$= \sum_{r=0}^{6} {}_7C_r \{f(x)Q_1(x)\}^{7-r} + r(x)^7$

$= f(x)Q_2(x) + r(x)^7 \cdots①$

とおける.

$r(x)^7$を$f(x)$で割った商を

$Q_3(x)$,余りを$R(x)$とおくと

$r(x)^7 = f(x)Q_3(x) + R(x)$

とできる. ①に代入すると

$g(x)^7$

$= f(x)\{Q_2(x)+Q_3(x)\} + R(x)$

これより$g(x)^7$を$f(x)$で割った

余りと$r(x)^7$を$f(x)$で割った余り

はともに$R(x)$.

(2)

$h(x)^7 = f(x)Q_4(x) + h_1(x)$

$h_1(x)^7 = f(x)Q_5(x) + h_2(x)$

とおく.

$h(1)^7 = h_1(1)$

$h(2)^7 = h_1(2)$.

$g(x) = h(x)^7$ とすると (1)より

$g(x)^7 = h(x)^{49}$ を$f(x)$で割った

余りと$h_1(x)^7$を$f(x)$で割った

余りは等しいので, $h(x)^{49}$を

$f(x)$で割った余りは$h_2(x)$

ここで$h_2(x) = h(x)$のとき,

$h(x)^{49} = f(x)Q_6(x) + h(x)$

$\Leftrightarrow h(x)^{49} - h(x) = f(x)Q_6(x)$

とおける. 両辺xで微分して

$\{h(x)^{49} - h(x)\}'$

$= f'(x)Q_6(x) + f(x)Q_6'(x)$

以上より

$\begin{cases} h(1)^{49} - h(1) = 0 \cdots (\mathrm{i}) \\ h(2)^{49} - h(2) = 0 \cdots (\mathrm{ii}) \\ 49h(1)^{48}h'(1) - h'(1) = 0 \cdots (\mathrm{iii}) \end{cases}$

(i)より

$(1+a+b)\{(1+a+b)^{48} - 1\} = 0$

$\therefore 1+a+b = 0, \pm 1 \cdots ☆$

(ii)より

$(4+2a+b)\{(4+2a+b)^{48} - 1\} = 0$

$\therefore 4+2a+b = 0, \pm 1 \cdots ♡$

(iii)より

$\{49(1+a+b)^{48} - 1\}(2+a) = 0$

$\therefore a = -2$

☆は $b = 1, 2, 0$

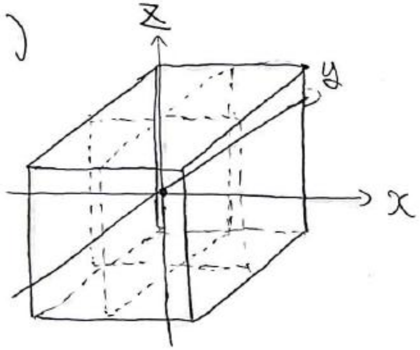
♡は $b = 0, \pm 1$

以上より(a, b)の組は

$(a, b) = (-2, 1), (-2, 0)$

第6問

(1)



Sは立体体の上の正方形がない状態. つまりVは立方体と $x^2+y^2+z^2\leqq3$ かつ $z\geqq1$ の和集合. $x^2+y^2+z^2\leqq3$ かつ $z\geqq1$ の体積は半径$\sqrt{3}$の球の体積の$\frac{1}{6}$から $4\times1\times\frac{1}{3}$ をひいたもの.

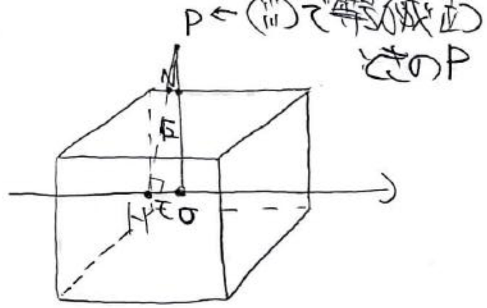
Vの体積は

$\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3\times\frac{1}{6}-\frac{4}{3}+2^3$

$=\underline{\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi+\frac{20}{3}}$ //

(2)

$N=0$ とすると VのWの範囲は等しいので $V<W$.



Pからおろした垂線の足をHとし $OH=t$ とする.

$PR=\sqrt{3-t}$

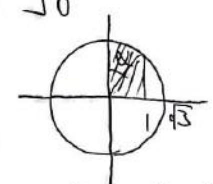
Vに対して追加する体積は

$\int_{-1}^{1}(\sqrt{3-t^2}-\sqrt{2})^2\pi\times\frac{135°}{360°}dt\times4$

$=\frac{3}{2}\pi\int_{-1}^{1}(5-t^2-2\sqrt{2}\sqrt{3-t^2})dt$

$=3\pi\int_{0}^{1}(5-t^2-2\sqrt{2}\sqrt{3-t^2})dt$

$=3\pi\left[5t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1$

$-6\sqrt{2}\pi\times$ 

$=\frac{42}{3}\pi-6\sqrt{2}\pi\times\left(3\pi\times\frac{\alpha}{2\pi}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=14\pi-9\sqrt{2}\pi\alpha-6\pi$

$=8\pi-9\sqrt{2}\pi\alpha$

Wの体積は

$\underline{\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi+\frac{20}{3}+8\pi-9\sqrt{2}\pi\alpha}$ //