# 2023 上智 理工

$\boxed{1}$ (1)

(i)

6番目使う　4,5番目使う

$$\frac{{}_3C_2\cdot 1+{}_3C_1\cdot 1\cdot 1}{{}_6C_3}$$

$$=\frac{3}{10}$$ //

(ii)

すべて大きさ1　1つのみ大きさ1

$$\frac{{}_4C_3+1\cdot 1\cdot {}_4C_1}{{}_6C_3}$$

$$=\frac{2}{5}$$ //

(2)

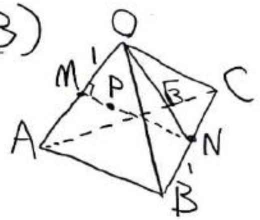
(i) P, Q, R

(ii) Q, R

(iii) P, Q

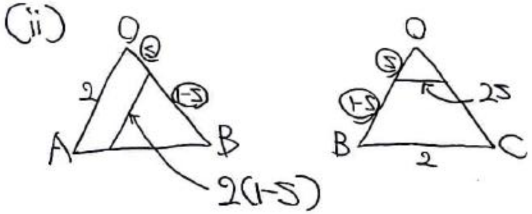
(iv) R

(3)




$MN=\sqrt{2}$ … (b) //

(ii)




断面は長方形 … (d) //

面積 … $4s(1-s)$ … (k) //

$\boxed{2}$

(1) $y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$(0\leqq y\leqq 1)$

$g(x)$の定義域は $0\leqq x\leqq 1$ … (d) //

(2) $x=\sin y$

$$1=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}}=\frac{5}{3}$$ //

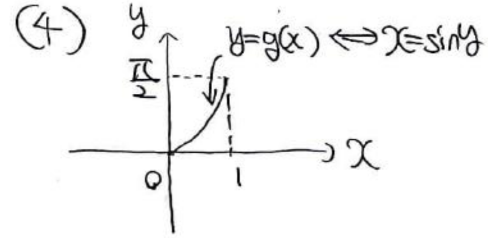
(3)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx$$

$$=\Big[xg(x)\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$$ //

(4)




$$\int_0^1 \pi y^2\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi y^2\frac{dx}{dy}\,dy$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\cos y\,dy$$

$$=\pi\Big[y^2\sin y+2y\cos y-2\sin y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

( ↓微分した主の
$y^2\cos y+2y\sin y-2y\sin y+2\cos y-2\cos y$ )

$$=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)=\frac{\pi^3}{4}-2\pi$$ //

$\boxed{3}$

(1)

$S_1$

$$=\int_1^e \log x\,dx$$

$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^e$$

$$=1$$ //

(2) $S_{n+1}$

$$=\int_1^e (x)'(\log x)^{n+1}\,dx$$

$$=\Big[x(\log x)^{n+1}\Big]_1^e-\int_1^e x(n+1)(\log x)^n\frac{1}{x}\,dx$$

$$=e-(n+1)S_n$$

「$S_n=a_ne+b_n$, $a_n\in\mathbb{Z}$, $b_n\in\mathbb{Z}$ と表せる」ことを数学的帰納法で示す

(i) $n=1$のとき

$S_1=0\cdot e+1$

より成立.

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定すると

$S_k=a_ke+b_k$, $a_k\in\mathbb{Z}$, $b_k\in\mathbb{Z}$

$n=k+1$のとき

$S_{k+1}$

$=e-(k+1)S_k$

$=e-(k+1)(a_ke+b_k)$

$=\{1-(k+1)a_k\}e-(k+1)b_k$

$1-(k+1)a_k\in\mathbb{Z}$, $-(k+1)b_k\in\mathbb{Z}$

よりこのときも成立.

(i)(ii)よりすべての自然数$n$において成立.