2023 京都大(理系)

1

問1. $x^2=t$ とおく.

$2x\,dx=dt$

$\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx$

$=\int_1^{16}\frac{1}{2t^{\frac{1}{4}}}\log t\,dt$

$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{4}}\log t-\frac{8}{9}t^{\frac{3}{4}}\right]_1^{16}$

$\boxed{t^{-\frac{1}{4}}\log t+\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{4}}}$ $\boxed{-\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{4}}}$

$=\cdots=\frac{64}{3}\log 2-\frac{56}{9}$ //

問2.

$x^5=1$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$x^{2023}-1$

$=x^3(x^{2020}-1+1)-1$

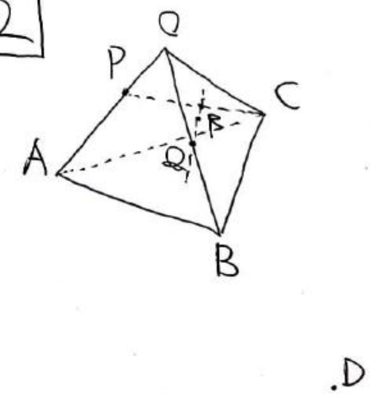
$=x^3(x^{2020}-1)+x^3-1$

$=x^3(x^5-1)Q(x)+x^3-1$

$=x^3(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)Q(x)$
$+x^3-1$

求める余りは x^3-1 //

2



$\vec{OA}=\vec{a}$
$\vec{OB}=\vec{b}$
$\vec{OC}=\vec{c}$
とする.

$\vec{OR}=t\vec{OD}$
$=t\vec{a}+2t\vec{b}+3t\vec{c}$ とする.

直線PCとQRの交点をXとすると

$\vec{OX}=s\vec{OP}+(1-s)\vec{OC}$
$=\frac{s}{3}\vec{a}+(1-s)\vec{c}$

$\vec{OX}=(1-u)\vec{OQ}+u\vec{OR}$
$=\frac{1-u}{2}\vec{b}+ut(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})$

比較すると

$\begin{cases}\frac{s}{3}=ut \\ 1-s=3ut\end{cases}$ $\therefore s=\frac{1}{2}$

また

$\frac{1-u}{2}+2\underbrace{ut}_{\frac{1}{6}}=0$

$\Leftrightarrow 3-3u+2=0$ $\therefore u=\frac{5}{3}$

$\therefore t=\frac{1}{10}$

$OR:RD=1:9$ //

3

(1)

P(Yが5で割り切れる)

$=P$(少なくとも1つが5)

$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ //

(2)

A…3の倍数が少なくとも1つある

B…5 〃

P(Yが15で割り切れる)

$=P(A\cap B)$

$=P((U-\overline{A})\cap(U-\overline{B}))$

$=P(U-\overline{B}-\overline{A}+\overline{A}\cap\overline{B})$

$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ //

4

$f(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1$
$+\frac{1}{e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1}$

$g(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1$ とおく.

$g'(x)=-2xe^{-x^2}+\frac{1}{2}x$

$=\frac{x}{2}(1-4e^{-x^2})$

$g'(x)=0$

$\Leftrightarrow e^{-x^2}=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -x^2=\log\frac{1}{4}=-2\log 2$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2\log 2}=\pm\sqrt{\log 4}$

$g(x)$は偶関数より $0\leqq x\leqq 1$ を調べる.

x	$0\cdots 1$
$g'(x)$	$0\ -$
$g(x)$	$2\ \searrow\ e^{-1}+\frac{5}{4}$

$t=g(x)$ として

$f(x)=t+\frac{1}{t}$ とすると

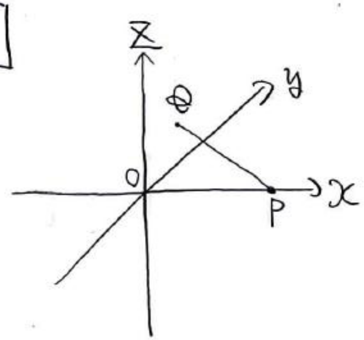
$\frac{df(x)}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$

t	$e^{-1}+\frac{5}{4}$ ⋯ 2
$\frac{df(x)}{dt}$	+ + +
$f(x)$	↗ ↗ $\frac{5}{2}$ ←最大値

$e^{-1}+\frac{5}{4} + \frac{1}{e^{-1}+\frac{5}{4}} = \frac{5e+4}{4e} + \frac{4e}{5e+4}$ ← 最小値

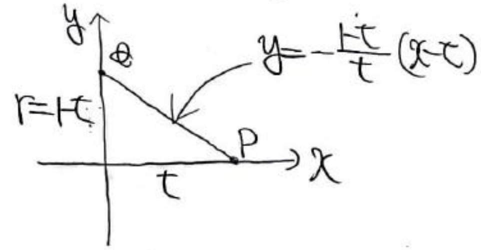
※最初に $x^2 = u$ などとおいたほうが楽でした。

$\boxed{5}$



$P(t, 0, 0)$
$Q(0, r\cos\theta, r\sin\theta)$
とおく。
$OP + OQ = t + r = 1$

$\theta = 0$として考える。$0 < t \leqq 1$とな



$y = -\frac{1-t}{t}(x-t) \quad (0 \leqq x \leqq t)$

$= -\frac{1-t}{t}x + 1 - t$

$= -\frac{1}{t}x - t + x + 1$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2}x - 1$

$= \frac{x-t^2}{t^2}$

t	x ⋯ $\sqrt{x}$ ⋯ 1
$\frac{dy}{dt}$	+ 0 −
y	0 ↗ $x-2\sqrt{x}+1$ ↘ 0

$\therefore 0 \leqq y \leqq x - 2\sqrt{x} + 1$

これが $\theta = 0$, $0 < t \leqq 1$ とした PQ の通過領域。x軸まわりの
求める体積はこれの回転体の2倍.

$2\int_0^1 (x - 2\sqrt{x} + 1)^2 \pi \, dx$

$= 2\pi \int_0^1 (x^2 + 4x + 1 - 4x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 2x) \, dx$

$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^2 \right]_0^1$

$= \cdots$

$= \frac{2}{15}\pi$

$\boxed{6}$

(1)

$\cos 3\theta$
$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos 4\theta$
$= \cos 3\theta \cos\theta - \sin 3\theta \sin\theta$
$= 4\cos^4\theta - 3\cos^2\theta - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\sin\theta$
$= 4\cos^4\theta - 3\cos^2\theta - 3(1-\cos^2\theta) + 4(1-\cos^2\theta)^2$
$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

$2^{n-1} = -p(c_{n-1} + \cdots + c_0 p^{n-1})$
これは矛盾. 正の整数 m, n は存在しない。

(2) $\cos\theta = \frac{1}{p}$ のとき $\theta = \frac{m}{n}\pi$ なる正の整数 m, n が存在すると する.

$\cos k\theta = T_k(\cos\theta)$
なる $T_k(x)$ が k次で x^k の係数は 2^{k-1} となることを示す.

(i) $T_1(x) = x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$
より成立.

(ii) $k = l, l+1$ のとき成立とすると

$\cos(m+1)\theta + \cos(m-1)\theta = 2\cos m\theta \cos\theta$

$m = l+1$

$\cos(l+2)\theta = 2\cos\theta\cos(l+1)\theta - \cos l\theta$

$\therefore T_{l+2}(\theta) = 2x T_{l+1}(\theta) - T_l(\theta)$

$T_{l+1}(\theta)$ の x^{l+1} の係数が 2^l より
$T_{l+2}(\theta)$ の x^{l+2} の係数が 2^{l+1}.

以上より

$T_n(x) = \cos n\theta = \cos m\pi = (-1)^m$

$\Leftrightarrow T_n(x) - (-1)^m$
$= 2^{n-1}x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0 = 0$

$x = \frac{1}{p}$ を代入して p^n 倍すると(左に)