2023 北海道大(理系)

$\boxed{1}$

(1)

(i) $n=1$ のとき C_n は円.

(ii) $n=k$ のとき円であると仮定すると

$|z-\alpha_k|=r_k$

となる.

$n=k+1$ のときは

$|z-\alpha_k|=r_k$

$|2w-1-i-\alpha_k|=r_k$

$\left|w-\frac{\alpha_k+1+i}{2}\right|=\frac{r_k}{2}$

となり w は中心 $\frac{\alpha_k+1+i}{2}$, 半径 $\frac{r_k}{2}$ の円となるので このときも成立.

(i)(ii) より すべての自然数 n において C_n は円.

以上より

$\alpha_{n+1}=\frac{\alpha_n+1+i}{2}$, $r_{n+1}=\frac{r_n}{2}$

となる.

$\alpha_n-1-i=(\underbrace{\alpha_1}_{0}-1-i)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \alpha_n=(1+i)\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$r_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

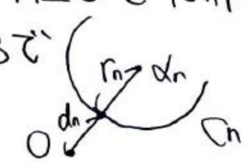
(2)

$|\alpha_n|=\sqrt{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$|\alpha_n|$ は単調増加. r_n は単調減少. $|\alpha_3|=\frac{3\sqrt{2}}{4}>1$. $r_3=\frac{1}{2}$

より $n\geqq 3$ で $|\alpha_n|>r_n$.

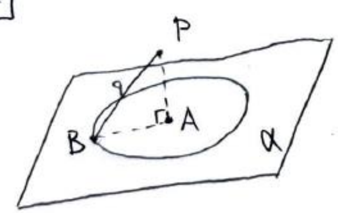
$n\geqq 3$ で



$d_n=|\alpha_n|-r_n$ より

$\lim_{n\to\infty} d_n=\sqrt{2}-0=\sqrt{2}$

$\boxed{2}$



$\alpha: ax+by+cz+d=0$ とおく.

$$\begin{cases}4a+2b+c+d=0 & \cdots ① \\ a-4b+c+d=0 & \cdots ② \\ 2a+2b-c+d=0 & \cdots ③\end{cases}$$

①−②

$3a+6b=0 \quad \therefore b=-\frac{1}{2}a$

①−③

$2a+2c=0 \quad \therefore c=-a$

①に戻すと

$4a+a-a+d=0 \quad \therefore d=-4a$

$\alpha: ax-\frac{1}{2}ay-az-4a=0$

$x-\frac{1}{2}y-z-4=0 \quad (a\neq 0)$

$2x-y-2z-8=0$

直線PA: $\begin{cases}x=4+2t \\ y=2-t \\ z=1-2t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

$P(4+2p, 2-p, 1-2p)$ とすると

$PB=\sqrt{(3+2p)^2+(6-p)^2+(-2p)^2}$

$=\sqrt{9p^2+45}=9$

$p^2=4$, $p=\pm 2$

(2) $P(0,4,5)$ ($\because 1-2p>0$)

(1)

$AP=\sqrt{16+4+16}=6$

(3)

$S: x^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$

直線OC: $\begin{cases}x=2k \\ y=2k \\ z=-k\end{cases} \quad (k\in\mathbb{R})$

連立して

$4k^2+(2k-4)^2+(-k-5)^2=81$

$9k^2-6k-40=0$

$k=\frac{3\pm\sqrt{9+360}}{9}$

$=\frac{1\pm\sqrt{41}}{3}$

これらを k_1, k_2 $(k_1>k_2)$ とすると 2点は

$(2k_1, 2k_1, -k_1)$, $(2k_2, 2k_2, -k_2)$

距離は

$\sqrt{(2k_1-2k_2)^2+(2k_1-2k_2)^2+(k_1-k_2)^2}$

$=3(k_1-k_2)$

$=3\cdot\frac{2\sqrt{41}}{3}$

$=2\sqrt{41}$

3

(1)

$f(x)=xe^{-x}$

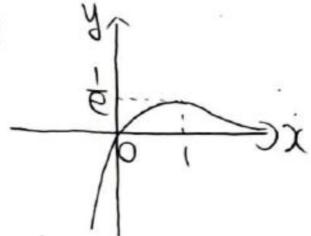
$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$=(1-x)e^{-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0$

より



$k>\frac{1}{e}$ のとき なし

$k=\frac{1}{e},\ k\leqq 0$ のとき 1コ

$0<k<\frac{1}{e}$ のとき 2コ

(2)

$xye^{-(x+y)}$

$=xe^{-x}\cdot ye^{-y}=f(x)f(y)$

$x>0,\ y>0$ において(1)より

$0<xye^{-(x+y)}\leqq\frac{1}{e^2}$

$c=\frac{1}{e^2}$ のとき $x=y=1$.

このときのみ x,y がただ1組.

(3)

$xye^{-(x+y)}=\frac{3}{e^4}$

$f(x)f(y)=\frac{3}{e^4}$

y を最大にするには $f(y)$ を小さく

$f(x)$ を大きくすればいいので

$f(x)=\frac{1}{e}$ のとき

$f(y)=\frac{3}{e^3}$

(1)より $y>1$ で $f(y)=\frac{3}{e^3}$ となる y は1つで $y=3$.

このとき $x=1$.

4

(1)

$k_3=|1-\underbrace{a_1}_{\leqq 0}|+|a_1-a_2|$

$+|a_2-a_3|+|\underbrace{a_3-6}_{\leqq 0}|$

$=5+a_1-a_3$

$+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|$

$a_1>a_3$ なら $k_3=5$ とならない

ので $a_1\leqq a_3$ が必要.

$a_1-a_3=-k$ とおく $(0\leqq k\leqq 5)$

$a_1=a_3-k$

$k_3=5-k+|a_3-a_2-k|+|a_2-a_3|$

$a_2-a_3=l$ とおく

$k_3=5-k+|-l-k|+|l|$

∘ $l>0$ のとき

$k_3=5-k+l+k+l$

$=5+2l>5$

∘ $l=0$ のとき

$k_3=5-k+k=5$

∘ $l<0$ のとき

$k_3=5-k-l+|-l-k|$

$-k-l\leqq 0 \iff -l\leqq k$ のとき

$k_3=5-k-l+l+k=5$

逆に $-k-l>0$ だと

$k_3=5+2(-k-l)>0$

つまり

$P(k_3=5)$

$=P(a_1<a_2=a_3)$

$+P(a_1=a_2=a_3)$

$+P(a_1<a_2<a_3)$

$+P(a_1=a_2<a_3)$

$=\frac{{}_6C_2+6+{}_6C_3+{}_6C_2}{6^3}$

$=\frac{7}{27}$

(2)

k_n

$=5+a_1-a_n$

$+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|$

$n\geqq 2$ のすべての自然数で

$k_n\geqq 5$ であることを示す

(等号成立は $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$) $\cdots$☆

(i) $n=2$ のとき

$k_2=5+a_1-a_2+|a_1-a_2|$

$\geqq 5$

等号成立は $a_1\leqq a_2$

(ii) $n=k$ のとき☆が成り立つとする.

$n=k+1$ のとき

k_{k+1}

$=k_k-|a_k-6|+|a_k-a_{k+1}|+|a_{k+1}-6|$

$=k_k-(6-a_k)+|a_k-a_{k+1}|+(6-a_{k+1})$

$=k_k+a_k-a_{k+1}+|a_k-a_{k+1}|$

$\geqq k_k\geqq 5$

等号成立は $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_k\leqq a_{k+1}$ のとき

(i)(ii)より $n \geq 2$ のすべての自然数で④は成立.

$\ell_n = 5$ で $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ が必要十分条件.

(3)

L_n は

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 = 4 \leq a_5 \leq \cdots \leq a_n$

のとき最小.

P_n

$= P(a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 4$ かつ $4 \leq a_5 \leq \cdots \leq a_n \leq 6)$

$= \dfrac{{}_6C_3 \times {}_{n-4+2}C_2}{6^n}$

1	2	3	4
0||	0||	0||	

4	5	6
00|	00⋯0|	0

$= \dfrac{20 \times {}_{n-2}C_2}{6^n}$

$= \dfrac{10(n-2)(n-3)}{6^n} \quad (n \geq 4)$ //

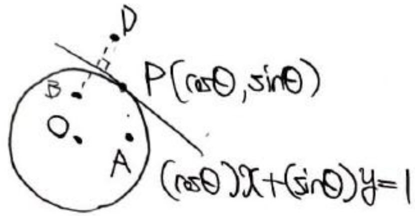
5

(1) $f(0) = (a-1)b < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = (1-b)a > 0$

中間値の定理より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に少なくとも解が1つ存在.

(2)



直線BD: $\begin{cases} x = (\cos\theta)t \\ y = (\sin\theta)t + b \end{cases}$

連立すると

$(\cos^2\theta)t + (\sin^2\theta)t + b\sin\theta = 1$

$\therefore t = 1 - b\sin\theta$

B, Dの中点は

$x = (1 - b\sin\theta)\cos\theta,\ y = (1 - b\sin\theta)\sin\theta + b$

D$(2\cos\theta - b\sin 2\theta,\ 2\sin\theta + b\cos 2\theta)$ //

(3)

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta - b\sin 2\theta - a \\ 2\sin\theta + b\cos 2\theta \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \cos\theta - a \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AP}$, $k \in \mathbb{R}$ が存在すればよい.

$k = \dfrac{2\sin\theta + b\cos 2\theta}{\sin\theta}$

より

$2\cos\theta - b\sin 2\theta - a = \dfrac{2\sin\theta + b\cos 2\theta}{\sin\theta}(\cos\theta - a)$

これを整理すると

$ab\cos 2\theta + a\sin\theta - b\cos\theta = 0$

(1)より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に少なくとも1つ存在.

$f'(\theta)$

$= -2ab\sin 2\theta + a\cos\theta + b\sin\theta$

$\geq -2ab\sin 2\theta + 2\sqrt{ab\cos\theta\sin\theta}$

$(a\cos\theta > 0,\ b\sin\theta > 0$ より(相加平均)≧(相乗平均))

等号は $a\cos\theta = b\sin\theta$

$= -2ab\sin 2\theta + \sqrt{2ab\sin 2\theta}$

$= \sqrt{2ab\sin 2\theta}\,(1 - \sqrt{2ab\sin 2\theta})$

ここで再び(相加平均)≧(相乗平均)より

$1 > a^2 + b^2 \geq 2ab$ (等号は $a = b$)

$\therefore \sqrt{2ab\sin 2\theta} < 1$

以上より

$f'(\theta) > 0$ つまり $f(\theta)$ は単調増加なのでただ1つ解をもつ.