2022 早稲田 理工系

[I] $g(x)=e^{2x}-4e^{x}$

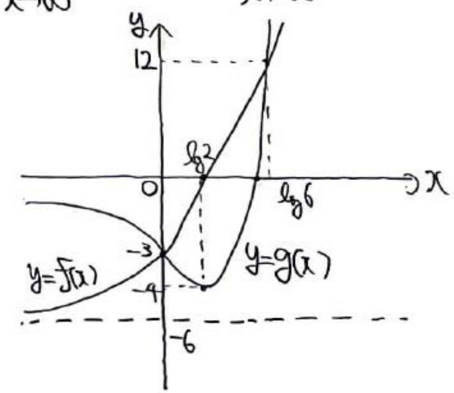
(1) $g'(x)=2e^{x}(e^{x}-2)$

x	$\cdots$ $\log 2$ $\cdots$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
$g(x)$	$\searrow$ -4 $\nearrow$

$f(x)-g(x)$
$=-e^{2x}+7e^{x}-6$
$=-(e^{x}-1)(e^{x}-6)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-6$

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} g(x)=0$



(2)
S
$=\int_0^{\log 6}\{f(x)-g(x)\}dx$
$=\left[-\frac{1}{2}e^{2x}+7e^{x}-6x\right]_0^{\log 6}$
$=\cdots=\underline{\frac{35}{2}-6\log 6}$ //

(3) $|f(x)|=|g(x)|$ となるのは
$3e^{x}-6=-e^{2x}+4e^{x}$
$\Leftrightarrow e^{2x}-e^{x}-6=0$
$\Leftrightarrow e^{x}=3,\ \cancel{-2}\ (e^{x}>0)$
$0\leqq x\leqq \log 3$ のとき $|f(x)|\leqq|g(x)|$
$\log 3\leqq x\leqq \log 6$ のとき $|f(x)|\geqq|g(x)|$

V
$=\int_0^{\log 2}\{(e^{2x}-4e^{x})^2-(3e^{x}-6)^2\}\pi dx$
$+\int_{\log 2}^{\log 3}(e^{2x}-4e^{x})^2\pi dx$
$+\int_{\log 3}^{\log 4}(3e^{x}-6)^2\pi dx$
$+\int_{\log 4}^{\log 6}\{(3e^{x}-6)^2-(e^{2x}-4e^{x})^2\}\pi dx$
$=\pi\int_0^{\log 3}(e^{4x}-8e^{3x}+16e^{2x})dx$
$-\pi\int_0^{\log 2}(9e^{2x}-36e^{x}+36)dx$
$+\pi\int_{\log 3}^{\log 6}(9e^{2x}-36e^{x}+36)dx$
$-\pi\int_{\log 4}^{\log 6}(e^{4x}-8e^{3x}+16e^{2x})dx$

$F(x)=\int(e^{4x}-8e^{3x}+16e^{2x})dx$
$=\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{8}{3}e^{3x}+8e^{2x}+C$
$G(x)=9\int(e^{2x}-4e^{x}+4)dx$
$=9\left(\frac{1}{2}e^{2x}-4e^{x}+4x\right)+C$
とおくと

V
$=\pi\{F(\log 3)-F(0)-G(\log 2)+G(0)$
$+G(\log 6)-G(\log 3)$
$-F(\log 6)+F(\log 4)\}$
$=\pi\{\frac{81}{4}-\frac{8\cdot 27}{3}+72-\frac{1}{4}+\frac{8}{3}-8$
$-9(2-8+4\log 2)+9\left(-\frac{7}{2}\right)$
$+9(18-24+4\log 6)-9\left(\frac{9}{2}-12+4\log 3\right)$
$-9\cdot 36+\frac{8}{3}\cdot 6^3-8\cdot 36$
$+4^3-\frac{8}{3}\cdot 4^3+8\cdot 16\}$
$=\pi\{84-\frac{8\cdot 26}{3}$
$+\cancel{54}-\frac{63}{2}$
$-\cancel{54}-\frac{81}{2}+108$
$+\frac{8}{3}\cdot 152-9\cdot 36+64-160\}$
$=\pi\left(96-9\cdot 36+\frac{8\cdot 126}{3}-72\right)$
$=\pi(96-324+336-72)$
$=\underline{36\pi}$ //

[II]

(1) α,β を整数として
$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$
$\downarrow x=1$
$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)=pq$
$(1-\alpha,1-\beta)=(pq,1),(p,q),$
$(-pq,-1),(-p,-q)$
$(\alpha,\beta)=(1-pq,0),(1-p,1-q),$
$(1+pq,2),(1+p,1+q),$
求める $f(x)$ は
$(x-1+pq)x,\ (x-1+p)(x-1+q),$
$(x-1-pq)(x-2),\ (x-1-p)(x-1-q)$

(2)

$f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x)$
$= 0$

この相異なる解の総和は

$1-pq+0+1-p+1-q$
$+1+pq+2+1+p+1+q$
$= 8$

となり，p, q によらない．

[III]

(1)

$b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{7}{12}$

$\Longleftrightarrow b_{n+1} - \frac{7}{6} = \frac{1}{2}\left(b_n - \frac{7}{6}\right)$

$\Downarrow$

$b_n - \frac{7}{6} = \left(r - \frac{7}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore b_n = \left(r - \frac{7}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{7}{6}$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{7}{6}$ //

同様に

$c_n = \left(r - \frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{5}{3}$

$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{5}{3}$ //

(2)

$b_n \leqq a_n \leqq c_n \cdots ①$

とおく．

(i) $n=1$ のとき $b_1 = a_1 = c_1 = r$ より

$b_1 \leqq a_1 \leqq c_1$

このとき ① は成立．

(ii) $n=k$ のとき ① が成り立つと仮定する．

$a_k - 1 < [a_k] \leqq a_k$

$\Longleftrightarrow \frac{a_k - 1}{4} < \frac{[a_k]}{4} \leqq \frac{a_k}{4}$

$\Downarrow$

$\frac{2a_k - 1}{4} + \frac{5}{6} < a_{k+1} \leqq \frac{a_k}{2} + \frac{5}{6}$

$\Longleftrightarrow \frac{a_k}{2} + \frac{7}{12} < a_{k+1} \leqq \frac{a_k}{2} + \frac{5}{6}$

$\Downarrow$

$\frac{b_k}{2} + \frac{7}{12} \leqq \frac{a_k}{2} + \frac{7}{12} < a_{k+1} \leqq \frac{a_k}{2} + \frac{5}{6}$
$\leqq \frac{c_k}{2} + \frac{5}{6}$

$\Downarrow$

$b_{k+1} < a_{k+1} < c_{k+1}$

$n=k+1$ のときも ① が成立．

(i)(ii) よりすべての自然数 n において ① は成立．

(3)

(i) $r \geqq \frac{5}{3}$ のとき

c_n は単調減少かつ $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{5}{3}$

より $n \geqq M_1$ で $c_n < 2$

となる自然数 M_1 が存在．

$n \geqq M_1$ で

$\frac{7}{6} < b_n \leqq a_n \leqq c_n < 2$

(ii) $\frac{7}{6} \leqq r < \frac{5}{3}$ のとき

$\frac{7}{6} \leqq b_n \leqq a_n \leqq c_n < \frac{5}{3}$

(iii) $r < \frac{7}{6}$ のとき

b_n は単調増加かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{7}{6}$

より $n \geqq M_2$ で $b_n > 1$

なる自然数 M_2 が存在．

$n \geqq M_2$ で

$1 < b_n \leqq a_n \leqq c_n < \frac{5}{3}$

以上よりどんな r に対しても

$n \geqq \max(M_1, M_2)$ において

$1 < a_n < 2$

が成立．

$n \geqq \max(M_1, M_2)$ においては

$a_{n+1} = \frac{[a_n]}{4} + \frac{a_n}{4} + \frac{5}{6}$

$= \frac{1}{4} + \frac{a_n}{4} + \frac{5}{6}$

$= \frac{a_n}{4} + \frac{13}{12}$

$\Longleftrightarrow a_{n+1} - \frac{13}{9} = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{13}{9}\right)$

$M_\alpha = \max(M_1, M_2)$ とおくと

$a_n - \frac{13}{9} = \left(a_{M_\alpha} - \frac{13}{9}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-M_\alpha}$

$\Longleftrightarrow a_n = \frac{13}{9} + \left(a_{M_\alpha} - \frac{13}{9}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-M}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{13}{9}$ //

[IV]

(1) Cの体積を $v(C)$ とする.

$V_2 = v(B_1 \cup B_2)$

$= v(B_1) + v(B_2) - Y$

$= X + X - Y = 2X - Y$

$a=2,\ b=-1,\ c=0$ //

$V_3 = v(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$

$= v(B_1) + v(B_2) + v(B_3)$

$- v(B_1 \cap B_2) - v(B_2 \cap B_3)$

$- v(B_3 \cap B_1) + v(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$

$= 3X - 3Y + Z$

$a=3,\ b=-3,\ c=1$ //

$B_1 \cap B_6 = \phi,\ B_2 \cap B_5 = \phi$

$B_3 \cap B_4 = \phi$

他に

$B_1 \cap B_6 \cap B_x = \phi \quad (x=2,3,4,5)$

$B_2 \cap B_5 \cap B_y = \phi \quad (y=1,3,4,6)$

$B_3 \cap B_4 \cap B_z = \phi \quad (z=1,2,4,6)$

以上より $n=3$ のときと同じように考え

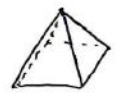
$V_6 = 6X - ({}_6C_2 - 3)Y + ({}_6C_3 - 12)Z$

$= 6X - 12Y + 8Z$

$a=6,\ b=-12,\ c=8$ //

(2)

B_1 の半径を r とする.

 $= (\triangle \times 4 + \square) \times \frac{r}{3}$

$(\sqrt{3}+1)^2 \times \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{3}$

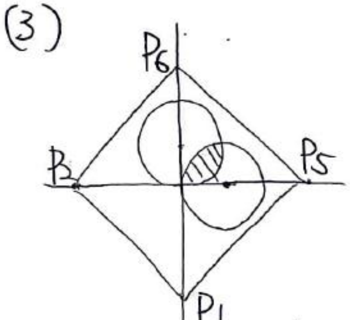
$= \left\{ \frac{1}{2} (\sqrt{3}+1)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 + (\sqrt{3}+1)^2 \right\} \times \frac{r}{3}$

$\frac{(\sqrt{3}+1)^3}{\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+1)^3 \times r$

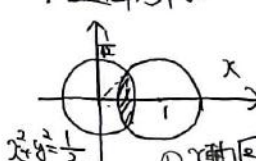
$\therefore r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$X = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ //

(3)



共通部分は



$Y = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - x^2 \right) dx$

$= \cdots = 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{5}{24} \right)$

V_2

$= 2X - Y$

$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} - 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{5}{24} \right)$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{5}{12} \right) \pi$ //

[V]

(1) $x^a = e^{-s}$

とおくと

$\lim_{x \to +0} f(x)$

$= \lim_{s \to \infty} e^{-s} \log e^{-\frac{s}{a}}$

$= \lim_{s \to \infty} \left(-\frac{1}{a} s e^{-s} \right)$

$= -\frac{1}{a} \cdot 0 = 0$ //

(2)

$f'(x) = ax^{a-1} \log x + x^{a-1}$

$= x^{a-1} (a \log x + 1)$

$f''(x) = (a-1) x^{a-2} (a \log x + 1)$

$+ x^{a-1} \cdot \frac{a}{x}$

$= x^{a-2} \{ a(a-1) \log x + a - 1 + a \}$

$= x^{a-2} \{ a(a-1) \log x + 2a - 1 \}$

x 切片は $(1, 0)$ より

$f''(1) = 2a - 1 = 0$

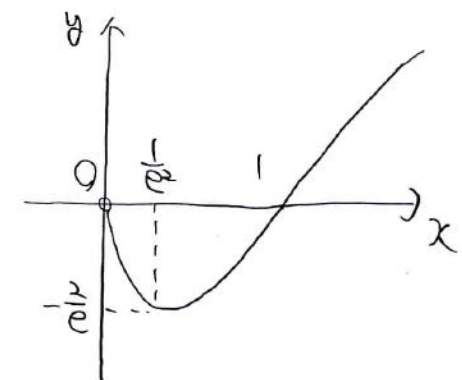
つまり $a = \frac{1}{2}$ が必要であり十分.

このとき

$f(x) = \sqrt{x} \log x$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (\log x + 2)$

x	$0 \cdots e^{-2} \cdots 1 \cdots$
$f''(x)$	$-\ 0\ +\ +\ +$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ 0\ -$
$f(x)$	$\searrow\ -\frac{2}{e}\ \nearrow\ 0\ \nearrow$



(3)

$l: y=f'(t)(x-t)+f(t)$

より y軸との交点のy座標に関して

$-f'(t)t+f(t)<0$

$\Leftrightarrow tf'(t)>f(t)$

$\Leftrightarrow a\log t+1>\log t$

$\Leftrightarrow 1>(1-a)\log t$

(i) $0<a<1$のとき

$\log t<\frac{1}{1-a}$

$\therefore 0<t<e^{\frac{1}{1-a}}$

(ii) $a=1$のとき

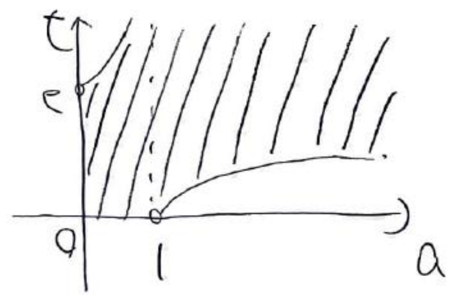
$t>0$

(iii) $a>1$のとき

$\log t>\frac{1}{1-a}$

$\therefore t>e^{\frac{1}{1-a}}$

求める領域は



上図の斜線部分.

境界線含まない.