2022 順天堂(医)

$\boxed{\text{I}}$

(1) $f(x)=\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\tanh x$ は奇関数.

$f(a)=\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(-a)=-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{2}$ //

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}$

$\Leftrightarrow e^a+e^{-a}=2e^a-2e^{-a}$

$\Leftrightarrow \quad 3=e^{2a}$

$f(2a)=\dfrac{e^{2a}-e^{-2a}}{e^{2a}+e^{-2a}}$

$=\dfrac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}=\dfrac{4}{5}$ //

$f'(x)=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=1-\{f(x)\}^2$ //

$f'(b)=1-\{f(b)\}^2$

$=1-\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{2}{3}$ //

$3\{f(x)\}^2-5f(x)-2$

$=\{3f(x)+1\}\{f(x)-2\}=0$

ここで $f'(x)=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}>0$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ より $f(x)\neq 2$.

$f(x)=-\dfrac{1}{3}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\Leftrightarrow -e^x-e^{-x}=3e^x-3e^{-x}$

$\Leftrightarrow 2e^{-x}=4e^x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=e^{2x}$

$\Leftrightarrow \quad 2x=\log\dfrac{1}{2}=-\log 2$

$\therefore\ x=\dfrac{-1}{2}\log 2$ //

(2)

$P(表)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{3+2+1}{18}=\dfrac{1}{3}$

$P_{表}(A)=\dfrac{P(A\cap 表)}{P(表)}$

$=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$ //

$P_{表}(B)=\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$ //

(b)

$P(表\times 2)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$

$=\dfrac{9+4+1}{108}$

$=\dfrac{7}{54}$

$P_{表\times 2}(A)=\dfrac{P(表\times 2\cap A)}{P(表\times 2)}$

$=\dfrac{1}{12}\times\dfrac{54}{7}$

$=\dfrac{9}{14}$ //

$P_{表\times 2}(B)=\dfrac{1}{108}\times\dfrac{54}{7}=\dfrac{2}{7}$ //

$P(表\to表\to裏)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\dfrac{5}{6}$

$=\dfrac{27+16+5}{216\cdot 3}$

$=\dfrac{48}{216\cdot 3}=\dfrac{2}{27}$

$P_{表表裏}(A)=\dfrac{1}{24}\times\dfrac{27}{2}=\dfrac{9}{16}$ //

$P_{表表裏}(B)=\dfrac{2}{81}\times\dfrac{27}{2}=\dfrac{1}{3}$ //

(3)

$x^3+9x+6=0$

$\left(y-\dfrac{ア}{y}\right)^3+9\left(y-\dfrac{ア}{y}\right)+6=0$

$y^3-3アy+\dfrac{3ア^2}{y}-\dfrac{ア^3}{y^3}+9y-\dfrac{9ア}{y}+6=0$

$ア=3$ // とすると

$y^3-\dfrac{27}{y^3}+6=0$

$\Leftrightarrow y^6+6y^3-27=0$

$\therefore\ y^3=3,\ -9$ // //

1の3乗根

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ //

(i) $y^3=3$ のとき $y=\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}\omega,\ \sqrt[3]{3}\omega^2$

$x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9},\ \sqrt[3]{3}\omega-\sqrt[3]{9}\omega^2,$

$\sqrt[3]{3}\omega^2-\sqrt[3]{9}\omega$ //

(ii) $y^3=-9$ のとき

$y=-\sqrt[3]{9},\ -\sqrt[3]{9}\omega,\ -\sqrt[3]{9}\omega^2$

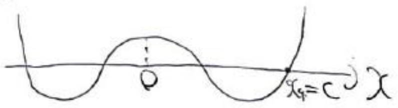
$x=-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3},\ -\sqrt[3]{9}\omega+\sqrt[3]{3}\omega,$

$-\sqrt[3]{9}\omega+\sqrt[3]{3}\omega^2$

これは(i)と同じ

$\boxed{\text{II}}$

(a)



$\int_0^c g(x)dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{6}{5}x^3+ax\right]_0^c$

$=\frac{1}{5}c^5-\frac{6}{5}c^3+ac=0$ (∵ $\frac{S_2}{2}=S_3$)

$c^4-6c^2+5a=0$

また

$g(c)=c^4-\frac{18}{5}c^2+a=0$

以上より

$c^4-6c^2+5a=0$

$-)\ 5c^4-18c^2+5a=0$

$-4c^4+12c^2=0$

∴ $c^2=3$ $\quad \underline{c=\sqrt{3}}$

$a=-9+\frac{54}{5}=\underline{\frac{9}{5}}$

$g(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4-18x^2+9=0$

$\Leftrightarrow (5x^2-3)(x^2-3)=0$

$x^2=\frac{3}{5}, 3$

∴ $b=\sqrt{\frac{3}{5}}=\underline{\frac{\sqrt{15}}{5}}$

(b)

$(x+d)^4$

$=x^4+\underbrace{4d}_{4}x^3+6d^2x^2+4d^3x+d^4$

$\underline{d=1}$

また2次に注目して

$6-\frac{2s}{t}=\frac{12}{5}$

∴ $\frac{2s}{t}=\underline{\frac{18}{5}}$

1次に注目して

$4-\frac{18}{5}\cdot 2+\gamma=-\frac{6}{5}$

∴ $\gamma=\underline{2}$

最後に

$h(-1)=q=1-4+\frac{12}{5}+\frac{6}{5}+\frac{12}{5}$

$=\underline{3}$

$y=h(x)$に対して条件Aをみたすのは(a)より

$y=\underline{\frac{-9}{5}}$

求める直線は

$2(x+1)+3+\frac{-9}{5}=\underline{2x+\frac{16}{5}}$

$\boxed{\text{III}}$

(1)

$s+t+u=1, s\geqq 0, t\geqq 0, u\geqq 0$

(2)

$\overrightarrow{OD}=\frac{s}{s+t+u}\vec{a}+\frac{t}{s+t+u}\vec{b}+\frac{u}{s+t+u}\vec{c}$

$=\frac{1}{s+t+u}\overrightarrow{OP}$

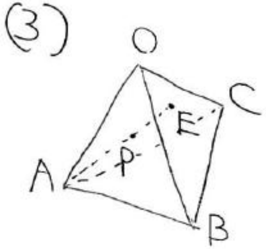
$OD:OP=1:s+t+u$

Pは四面体OABCの内部より

$s+t+u<1$

∴ $OD:PD=\underline{1:1-s-t-u}$

(3)



$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}$

$=\vec{a}+k\overrightarrow{AP}$

$=\vec{a}+k(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})$

$=(1-k)\vec{a}+sk\vec{a}+tk\vec{b}+uk\vec{c}$

$=(1-k+sk)\vec{a}+tk\vec{b}+uk\vec{c}$

$1-k+sk=0$

$(s-1)k=-1$

$k=\frac{1}{1-s}$ $\quad (s-1\neq 0)$

$\underline{\overrightarrow{OE}=\frac{t}{1-s}\vec{b}+\frac{u}{1-s}\vec{c}}$

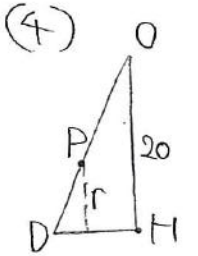
$AE:AP=k:1$

∴ $AE:PE=k:k-1$

$=\frac{1}{1-s}:\frac{s}{1-s}$

$=\underline{1:s}$

(4)



$OD:PD=20:r$

$\Leftrightarrow r=20(1-s-t-u)$

同様に(3)より $1:s=15:r$

$\Leftrightarrow r=15s$

同様に $r=12t, r=20u$.

以上を解くと $\overrightarrow{OP}=\frac{4}{15}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$