2022 東京慈恵会 医科大

7.

$P(\text{A赤B赤} \to \text{A赤B白})$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

$P(\text{A赤B白} \to \text{A白B赤})$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{9}$

$P(\text{A白B赤} \to \text{A赤B白})$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

すべてたすと

$\frac{9}{162} + \frac{50}{162} = \underline{\frac{59}{162}}$

$P(\text{A赤B白} \to \text{A白B赤} \to \text{A赤B白})$

$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$

$P(\text{A白B赤} \to \text{A赤B白} \to \text{A赤B白})$

$= \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{729}$

たすと

$\frac{1}{81} + \frac{16}{729} = \underline{\frac{25}{729}}$

2.

(1)

$\lim_{h \to +0} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h}$

$= \lim_{h \to +0} \frac{|h|}{h\sqrt{(-a+h)^2+1}}$

$= \lim_{h \to +0} \frac{1}{\sqrt{(-a+h)^2+1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

$\lim_{h \to -0} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h}$

$= \lim_{h \to -0} \frac{-h}{h\sqrt{(-a+h)^2+1}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h}$ が存在しない

ので微分可能でない.

(2)

$x > -a$ のとき

$f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+a)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

$= \frac{x^2+1-(x+a)x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

$= \frac{1-ax}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

$x < -a$ のとき

$f(x) = -\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = -\frac{1-ax}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} < 0$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ より

$x = \frac{1}{a}$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとる.

$\frac{\frac{1}{a}+a}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}} = \frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}} = \sqrt{2}$

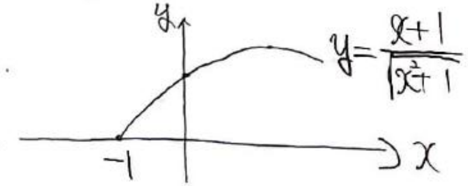
$1+a^2 = \sqrt{2+2a^2}$

2乗して

$a^4+2a^2+1 = 2a^2+2$

$a^4 = 1 \quad \therefore \underline{a = 1}$

(3) $a=1$ のとき



V

$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 \pi dx$

$= \pi \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} dx$

$= \pi \left[x + \log(x^2+1)\right]_{-1}^{0}$

$= \pi\{-(-1+\log 2)\}$

$= \underline{\pi(1-\log 2)}$

3.

(1) $k \geqq 5$ とする.

$a_4 - a_2 \leqq 3$

が成り立つ.

ここで a_2, a_3, a_4 は

m の正の約数かつ奇数より

$a_4 - a_3 \geqq 2$

$a_3 - a_2 \geqq 2$.

辺々足して

$a_4 - a_2 \geqq 4$

となるが, $a_4 - a_2 \leqq 3$ に反する.

$k \geqq 5$ としたことが誤りより

$k \leqq 4$. $k \geqq 2$ より

$k=3$ または $k=4$.

$k=3$ のとき $m = a_2^2$

$k=4$ のとき

$a_3 - a_2 \leqq 3$

$\Leftrightarrow a_3 \leqq a_2 + 3$

より a_2 も a_3 も奇数なので

$a_3 = a_2 + 2$

$\therefore m = a_2 \cdot a_3$

$= \underline{a_2(a_2+2)}$ //

(2)

$(a_2 n + 1)^{a_2} - 1$

$= \sum_{k=0}^{a_2} {}_{a_2}C_k (a_2 n)^k - 1$

$= \sum_{k=1}^{a_2} {}_{a_2}C_k (a_2 n)^k \cdots ☆$

${}_{a_2}C_k (a_2 n)^k$ は $k \geqq 2$ のとき

a_2^2 の倍数より m の倍数.

$k=1$ のとき

${}_{a_2}C_1 \cdot a_2 \cdot n = a_2^2 n$

よりこれも $a_2^2 = m$ の倍数.

つまり☆は m の倍数より

$(a_2 n + 1)^{a_2} - 1$ も m の倍数.

4.

(1) $z = \cos\theta + i\sin\theta$

w

$= \cos\theta + i\sin\theta + 2(\cos\theta - i\sin\theta)$

$= 3\cos\theta - i\sin\theta$

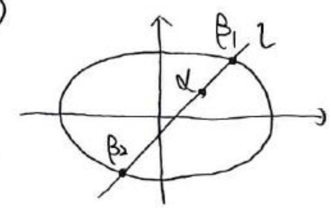
$u = 3\cos\theta,\ v = -\sin\theta$

$\Downarrow$

$\left(\frac{u}{3}\right)^2 + (-v)^2 = 1$

$\underline{\frac{u^2}{9} + v^2 = 1}$ //

(2)



$\beta = 3\cos\theta + i\sin\theta$

$\alpha = a + bi$ とおく

$l: \begin{cases} x = a + (3\cos\theta - a)t \\ y = b + (\sin\theta - b)t \end{cases}$

C と連立

$\{a + (3\cos\theta - a)t\}^2$

$+ 9\{b + (\sin\theta - b)t\}^2 = 9$

$\{(3\cos\theta - a)^2 + 9(\sin\theta - b)^2\}t^2$

$+ \{2a(3\cos\theta - a) + 18b(\sin\theta - b)\}t$

$+ a^2 + 9b^2 - 9 = 0$.

この2解を t_1, t_2 とおく.

$|\beta_1 - \alpha||\beta_2 - \alpha|$

$= \left|\begin{pmatrix}(3\cos\theta - a)t_1 \\ (\sin\theta - b)t_1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}(3\cos\theta - a)t_2 \\ (\sin\theta - b)t_2\end{pmatrix}\right|$

$= \left|\begin{pmatrix}3\cos\theta - a \\ \sin\theta - b\end{pmatrix}\right|^2 |t_1 t_2|$

$= \{(3\cos\theta - a)^2 + (\sin\theta - b)^2\} \dfrac{a^2 + 9b^2 - 9}{(3\cos\theta - a)^2 + 9(\sin\theta - b)^2}$

$\sin\theta - b = 0$ のとき最大をとる.

すなわち $\underline{l\text{ が実軸に平行のとき}}$ //