2022 東京医科歯科大(医)

$\boxed{1}$

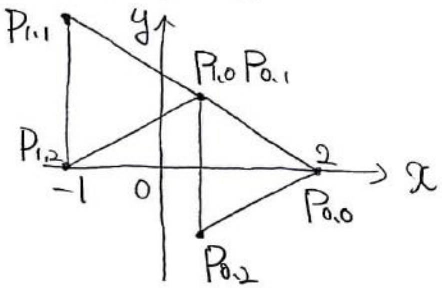
(1) $n=3$のとき

$P_{0,0}(2,0)$, $P_{0,1}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P_{0,2}\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P_{1,0}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_{1,1}(-1,\sqrt{3})$

$P_{1,2}(-1,0)$



(2) $n=4$のとき

$P_{i,j}\left(\cos\frac{\pi}{2}i+\cos\frac{\pi}{2}j, \sin\frac{\pi}{2}i+\sin\frac{\pi}{2}j\right)$

$P_{i,j}=P_{j,i}$より $i\leqq j$ のみ

調べる.

$P_{4m,4m}(2,0)$ $P_{4m+1,4m+1}(0,2)$

$P_{4m,4m+1}(1,1)$ $P_{4m+1,4m+2}(-1,1)$

$P_{4m,4m+2}(0,0)$ $P_{4m+1,4m+3}(0,0)$

$P_{4m,4m+3}(1,-1)$

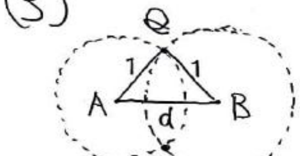
$P_{4m+2,4m+2}(-2,0)$

$P_{4m+2,4m+3}(-1,-1)$

$P_{4m+3,4m+3}(0,-2)$

$\therefore \underline{S_4=9}$ //

(3)



$\triangle AQB$が形成できればQは2つ.

これより

$0<d<2$のとき 2つ

$d=2$のとき 1つ

$d>2$のとき なし //

(4)

(2)と同様に $i\leqq j$ のみ

考える.

全体は

$n+(n-1)+\cdots+2+1$

$=\frac{1}{2}n(n+1)$通り ・・・①

$Q_k\left(\cos\frac{2\pi}{n}k, \sin\frac{2\pi}{n}k\right)$

とおくと

$\overrightarrow{OP_{i,j}}=\overrightarrow{OQ_i}+\overrightarrow{OQ_j}$

(i) $OP_{i,j}=0$のとき

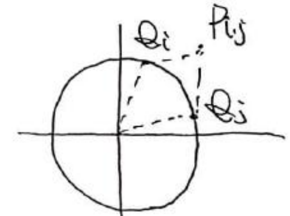
$P_{i,j}$が原点にあるのは Q_i, Q_k

が直径にあるときなので

nが奇数のとき 0

nが偶数のとき $\frac{n}{2}$.

(ii) $0<OP_{i,j}<2$のとき



1つの$P_{i,j}$に対してQ_i, Q_j

はただ1つ.

(iii) $OP_{i,j}=2$のとき

$i=j$ のときだが

$P_{0,0}, P_{1,1}, \cdots, P_{n-1,n-1}$は

すべて異なる

以上より①から(i)〜(iii)を数

nが奇数のとき $S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$

nが偶数のとき $S_n=1+\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{n}{2}$

偶数だと iとjがnの倍数も原点

$=\underline{\frac{1}{2}n^2+1}$ //

$\boxed{2}$

$y^2=4x$

両辺xで微分して

$2y\cdot\frac{dy}{dx}=4$

$y\neq 0$のとき

$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$

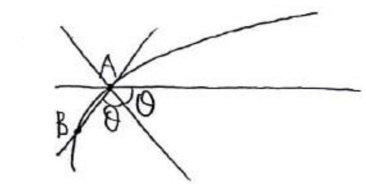
これより

$n_A: y=-\frac{\sqrt{4a}}{2}(x-a)+\sqrt{4a}$

$=-\sqrt{a}x+a\sqrt{a}+\sqrt{4a}$

$=-\sqrt{a}x+(a+2)\sqrt{a}$

(2) (i) $a\neq 1$のとき



$\tan\theta=-\sqrt{a}$ とおくと

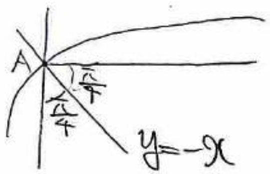
$\tan 2\theta=\frac{-2\sqrt{a}}{1-a}$ $(a\neq 1)$

直線AB: $y=\frac{-2\sqrt{a}}{1-a}(x-a)+\sqrt{4a}$

$=\frac{2\sqrt{a}}{a-1}x+\frac{2a\sqrt{a}+2\sqrt{a}-2a\sqrt{a}}{1-a}$

$=\frac{2\sqrt{a}}{a-1}x-\frac{2\sqrt{a}}{a-1}$ $(a\neq 1)$

(ii) $a=1$ のとき



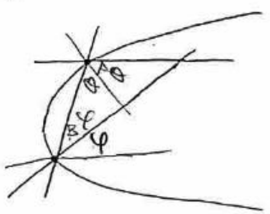
直線AB：$x=1$

以上より a の値に関わらず

$(a-1)y=2\sqrt{a}x-2\sqrt{a}$

$\Leftrightarrow \underline{2\sqrt{a}x-(a-1)y-2\sqrt{a}=0}$ //

(3)



(2)を $x=\frac{a-1}{2\sqrt{a}}y+1$ として

放物線と連立すると

$y^2=\frac{2(a-1)}{\sqrt{a}}y+4$

$\Leftrightarrow y^2-\left(2\sqrt{a}-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)y-4=0$

$\Leftrightarrow (y-2\sqrt{a})\left(y+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)=0$

$\therefore y=2\sqrt{a}, \underbrace{-\frac{2}{\sqrt{a}}}_{\text{Bのy座標}}$

(r_Bの傾き)$=-\frac{-\frac{2}{\sqrt{a}}}{2}$

$=\frac{1}{\sqrt{a}}$

これより r_A と r_B は直交.

図で $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$ より

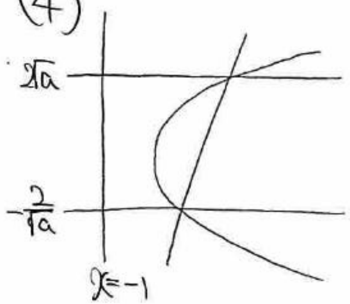
$2\theta+2\varphi=\pi$

これより r_B は直線 $y=\sqrt{4a}$ と

平行.

$\therefore r_B : \underline{y=-\frac{2}{\sqrt{a}}}$ //

(4)



S_1

$=\int_{-\frac{2}{\sqrt{a}}}^{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{4}y^2-\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}y+1\right)\right)dy$

$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{2}{\sqrt{a}}}^{2\sqrt{a}}(y-2\sqrt{a})\left(y+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)dy$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\left(2\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^3$

$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3$

S_1+S_2

$=\left\{(a+1)+\left(\frac{1}{a}+1\right)\right\}\left\{2\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}\right\}\cdot\frac{1}{2}$

$=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3$

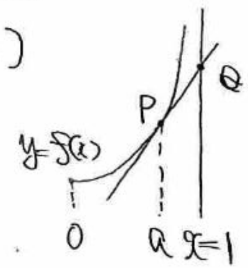
$\therefore S_2=\frac{2}{3}\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3$

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$

一定なので最大値は $\underline{\frac{1}{2}}$ //

$\boxed{3}$

(1)



接線は

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Qのy座標は

$f'(a)(1-a)+f(a)$

より

$PQ^2=(1-a)^2+\{f'(a)\}^2(1-a)^2=1$

$\Leftrightarrow 1+\{f'(a)\}^2=\frac{1}{(1-a)^2}$

$\Leftrightarrow \{f'(a)\}^2=\frac{2a-a^2}{(1-a)^2}$

$\therefore f'(a)=\frac{\sqrt{2a-a^2}}{1-a}$

$\therefore \underline{f'(x)=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{1-x}}$ //

(2)

$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)f'(x)dx$

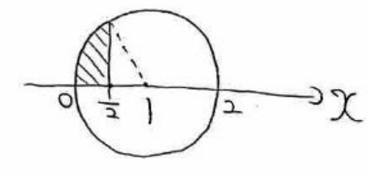
$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{2x-x^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\underbrace{\sqrt{1-(x-1)^2}}_{y}\,dx$

$\downarrow$

$y^2=1-(x-1)^2$

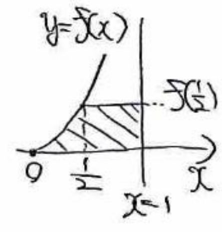
$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$



$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\underline{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}}$ //

(3)



求める面積は

$\int_0^{f(\frac{1}{2})}(1-x)dy$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)f'(x)dx$

$=\underline{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}}$ //