2021 横浜市立大

(理,医,データサイエンス)

[I]

(1) $G\,\underline{)\ a\quad b\ }$

$\quad\ a'\quad b'$

$\downarrow$

$Ga'b'=L \cdots ①$

$\Leftrightarrow ab=GL$

$L^2-G^2=(L+G)(L-G)=72$

$(L+G,\ L-G)$

$=(36,2),(18,4),(12,6)$

$(L,G)=(19,17),(11,7),(9,3)$

①に適するのは

$a'b'=3$

$(a',b')=(1,3),(3,1)$

$\underline{(a,b)=(3,9),(9,3)}$ //

(2)

P(積が4の倍数)

$=1-$P(積が奇数)$-$P(積が2の倍数だが4の倍数でない)

$=1-\dfrac{3^3}{6^3}-\dfrac{{}_3C_2\cdot 2\cdot 3^2}{6^3}$

$=\dfrac{216-27-54}{216}$

$=\dfrac{135}{216}$

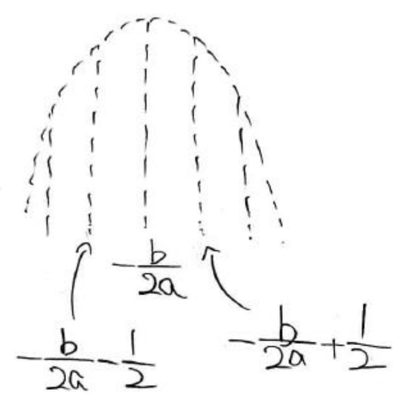
$=\underline{\dfrac{5}{8}}$ //

(3)

an^2+bn+c

$=a\left(n^2+\frac{b}{a}n\right)+c$

$=a\left(n+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$



必要十分条件は $\underline{a<0}$ // かつ

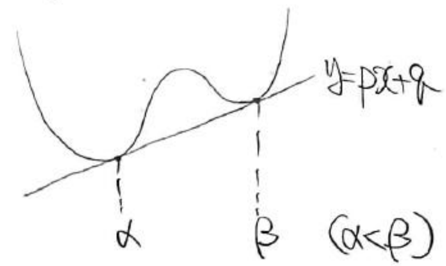
$-\frac{b}{2a}-\frac{1}{2}\leqq 2\leqq -\frac{b}{2a}+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{b}{a}-1\leqq 4\leqq -\frac{b}{a}+1$

$\Leftrightarrow -1\leqq \frac{b}{a}+4\leqq 1$

$\Leftrightarrow \underline{-5}\leqq \frac{b}{a}\leqq \underline{-3}$ //

(4)



$x^4-2x^3+x^2-2x+2-(px+q)$

$=x^4-2x^3+x^2-(2+p)x+2-q$

$=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

解と係数の関係

$2\alpha+2\beta=2 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1$

$\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta=1$

$\hookrightarrow (\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=1$

$\therefore \alpha\beta=0$

$\therefore \alpha=0,\ \beta=1$

求める面積は

$\int_0^1 x^2(x-1)^2dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}(x-1)^2\right]_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1 x^3(x-1)\,dx$

$=-\frac{2}{3}\left(\left[\frac{x^4}{4}(x-1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^4}{4}dx\right)$

$=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{20}\right)$

$=\underline{\frac{1}{30}}$ //

[II]

(1) $1,2\to\square$

$3,4,5\to\bigcirc$

$\square\times2,\ \bigcirc\times3$ の同じものを含む順列より

$\frac{5!}{2!3!}={}_5C_2=10$

□に左から1,2,○に左から3,4,5と並べるのは 通り.

$10\times1=\underline{10通り}$ //

(2)

1度シャッフルをして得られるカードの並び方は(1)と同様に考え,k=1からn−1までたせばいいので

$\sum_{k=1}^{n-1}{}_nC_k$

$=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k-2$

$=2^n-2<2^n$

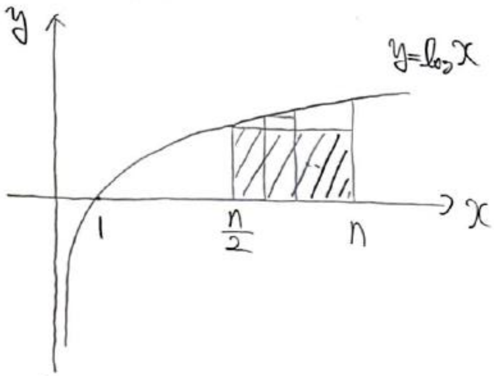
$\boxed{二項定理}$

(3)

$\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{n}\log k$ …①

を示す．

(i) $n=2m$（mは自然数）のとき



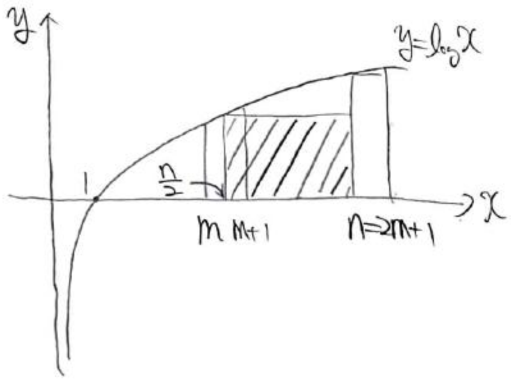
$\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}$

$< \log\frac{n}{2}+\log\left(\frac{n}{2}+1\right)+\cdots+\log\left(\frac{n}{2}+m-1\right)$

$< \log\frac{n}{2}+\log\left(\frac{n}{2}+1\right)+\cdots+\log(n-1)$

$< \sum_{k=1}^{n}\log k$

(ii) $n=2m+1$（mは自然数）のとき



$\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}$

$=\frac{1}{2}\log\frac{n}{2}+\frac{n-1}{2}\log\frac{n}{2}$

$=\frac{1}{2}\log\frac{n}{2}+m\log\frac{n}{2}$

$<\frac{1}{2}\log\frac{n}{2}+\{\log(m+1)+\cdots+\log(2m)\}$

$<\log(m+1)+\cdots+\log(2m)+\log(2m+1)$

$<\sum_{k=1}^{n}\log k$

以上より ①が成立

$\log\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}<\log(n!)$

$\therefore \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}<n!$

(4)

130枚のカードを1回シャッフルすると並び方は 2^{130} 未満である．3回シャッフルすると 2^{390} 未満である．これが130枚のカードの順列である130!より小さければ良い．(3)に $n=130$ として

$65^{65}<130!$ …②

である．また

最初本から逆算して考える

$64<65$

$\Leftrightarrow 6\log 2<\log 65$

$\Leftrightarrow 390\log 2<65\log 65$

$\Leftrightarrow \log 2^{390}<\log 65^{65}$

$\Leftrightarrow 2^{390}<65^{65}$ …☆

が言えるので②より

$2^{390}<130!$

[III] $a_{n+1}=\frac{3a_n+2}{a_n+2}$

(1)

$b_{n+1}=1-\frac{3}{a_{n+1}+1}$

$=1-\frac{3}{\frac{3a_n+2}{a_n+2}+1}$

$=1-\frac{3a_n+6}{3a_n+2+a_n+2}$

$=1-\frac{3(a_n+1)+3}{4(a_n+1)}$

$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4(a_n+1)}=\frac{1}{4}b_n$

$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{4}$

(2) $b_1=1-3=-2$

$\therefore b_n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{3}{a_n+1}=1-b_n=1+2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}=a_n+1$

$\therefore a_n=\frac{2-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}=\frac{2\cdot 4^{n-1}-2}{4^{n-1}+2}$ //

(3)

$$a_n=\frac{2(4^{n-1}+2)-6}{4^{n-1}+2}$$

$$=2-\frac{6}{4^{n-1}+2}$$

$4^{n-1}+2$が6の約数になるのは

$n=1,2$. $a_1=0$は適さないので求める要素の数は1コ

[IV] Cは積分定数とする.

(1) $t=\tan x$ とする.

$$dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx$$
$$=\int\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int\frac{1}{t}dt$$
$$=\log|t|+C$$
$$=\underline{\log|\tan x|+C}$$

(2)

$$\left(\frac{1}{\sin x\cos^{n+1}x}\right)'$$
$$=\frac{-\{\cos^{n+2}x+\sin x(n+1)\cos^n x(-\sin x)\}}{\sin^2 x\cos^{2n+2}x}$$
$$=\frac{-\{\cos^2 x+(n+1)(-\sin^2 x)\}}{\sin^2 x\cos^{n+2}x}$$
$$=\underline{-\frac{1}{\sin^2 x\cos^n x}+\frac{n+1}{\cos^{n+2}x}}$$

I_{n+2}
$$=\int\frac{1}{\sin x\cos^{n+2}x}dx$$
$$=\int\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n+2}x}dx$$
$$=\int\left(-\frac{1}{\tan x}\right)'\frac{\sin x}{\cos^{n+2}x}dx$$
$$=-\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n+2}x}$$
$$-\int\left(-\frac{1}{\tan x}\right)\frac{\cos^{n+3}x-\sin x(n+2)\cos^{n+1}x(-\sin x)}{\cos^{2n+4}}dx$$
$$=-\frac{1}{\cos^{n+1}x}$$
$$+\int\frac{\cos x}{\sin x}\frac{\cos^2 x+(n+2)\sin^2 x}{\cos^{n+3}x}dx$$
$$=-\frac{1}{\cos^{n+1}x}$$
$$+\int\frac{\cos^2 x+(n+2)(1-\cos^2 x)}{\sin x\cos^{n+2}x}dx$$
$$=-\frac{1}{\cos^{n+1}x}$$
$$+(n+2)I_{n+2}-(n+1)I_n$$
$$\Leftrightarrow (n+1)I_n=-\frac{1}{\cos^{n+1}x}+(n+1)I_{n+2}$$
$$\Leftrightarrow I_n=-\frac{1}{(n+1)\cos^{n+1}x}+I_{n+2}$$

これは示すべき式である.

(4)

$$\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx$$
$$=-\frac{1}{2\cos^2 x}+\int\frac{1}{\sin x\cos^3 x}dx$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\int\frac{1}{\sin x\cos^3 x}dx$$
$$=\log|\tan x|+\frac{1}{2\cos^2 x}+C$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x\cos^3 x}dx$$
$$=\left[\log|\tan x|+\frac{1}{2\cos^2 x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\log\sqrt{3}+2-\log 1-1$$
$$=\underline{\frac{1}{2}\log 3+1}$$

[V]

(1)

$$\int_0^1 ax(1-x)dx$$
$$=\left[\frac{a}{2}x^2(1-x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{a}{2}x^2(-1)dx$$
$$=\frac{a}{2}\int_0^1 x^2dx=\frac{a}{6}=1$$
$$\therefore \underline{a=6}$$

(2)

$E(Y)$
$$=E(10X-25)$$
$$=10E(X)-25\underbrace{E(1)}_{1}$$
$$=10\int_0^1 6x^2(1-x)dx-25$$
$$=60\left\{\left[\frac{x^3}{3}(1-x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}(-1)dx\right\}-25$$
$$=60\int_0^1\frac{x^3}{3}dx-25$$
$$=\underline{-20}$$

$V(Y)$
$$=V(10X-25)$$
$$=100V(X)$$

$E(X^2)$
$$=\int_0^1 6x^3(1-x)dx$$
$$=\left[\frac{6}{4}x^4(1-x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{3}{2}x^4(-1)dx$$
$$=\frac{3}{10}$$

$V(Y)$

$= 100\{E(X^2) - (E(X))^2\}$

$= 100\left(\frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$= 30 - 25 = \underline{5}$ //

(3)

$$P\left(\left|\frac{\bar{Y} - (-20)}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}}}\right| \leqq 1.96\right) = 0.95$$

$$\Downarrow$$

$$-1.96 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \leqq \bar{Y} + 20 \leqq 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{-20 - \frac{1.96}{\sqrt{5}} \leqq \bar{Y} \leqq -20 + \frac{1.96}{\sqrt{5}}}$$ //