2021 東京医科大(医)

第1問

(1) 出題ミスで全員正解

(2)

オイラーの多面体定理より

$v-e+29=2 \cdots ①$

1つの辺と1つの辺が対応して立体になるので、全体の辺の数は面の数の4倍の半分より

$e=4f\times\frac{1}{2}=2f$

$=\underline{58}$

①より

$v=\underline{31}$

(3)

$A=(x^3-2x^2+3)Q(x)+4x^2+5x+33$

$A=(x^2-3x+3)Q_2(x)+ax+b$

とおく

$Q_2(x)=(x+1)Q_1(x)+c$

とおけるので

$A=(x^2-3x+3)\{(x+1)Q_1(x)+c\}+ax+b$

$=\underbrace{(x^2-3x+3)(x+1)}_{x^3-2x^2+3}Q_1(x)$

$+\underbrace{c}_{4}x^2+\underbrace{(a-3c)}_{5}x+\underbrace{3c+b}_{33}$

$c=4,\ a=\underline{17},\ b=\underline{21}$

(4)

$n=9x+4=11y+7$

$\Leftrightarrow 9x-11y=3$

特殊解 $x=4,\ y=3$

$\therefore x=11k+4\ (k\in\mathbb{Z})$

$n=99k+\underline{40}$

(5)

$f(x)=-|x|^{\sqrt{6}}$

$f(\sqrt{6})=-(\sqrt{6})^{\sqrt{6}}$

$x<0$のとき

$f(x)=-(-x)^{\sqrt{6}}$

$f'(x)=-\sqrt{6}(-x)^{\sqrt{6}-1}(-1)$

$=\sqrt{6}(-x)^{\sqrt{6}-1}$

$f'(\sqrt{6}\cdot f(\sqrt{6}))$

$=\sqrt{6}\left\{-\left(-\sqrt{6}(\sqrt{6})^{\sqrt{6}}\right)\right\}^{\sqrt{6}-1}$

$=\sqrt{6}\left\{(\sqrt{6})^{\sqrt{6}+1}\right\}^{\sqrt{6}-1}$

$=\sqrt{6}\cdot(\sqrt{6})^5$

$=(\sqrt{6})^6=6^3=\underline{216}$

第2問

Aの要素で最小は$\underline{18\pi}$

B 〃 24π

$A\cap B$ 〃 $P_0=\underline{72\pi}$

$P\in A\cap B \Rightarrow P\in C$ より

$A\cap B\subset C$ (あ) $\underline{6}$

$\max f(x)=M=\underline{7}$

$\frac{x}{9}=2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$\frac{x}{12}=\frac{\pi}{2}+2l\pi\ (l\in\mathbb{Z})$

$\Downarrow$

$18k\pi=6\pi+24l\pi$

$\Leftrightarrow 3k-4l=1$

$k=3,\ l=2$ のとき

$c=\underline{54\pi}$

第3問

(1)

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$

$=7\cdot 8\,\frac{49+64-81}{2\cdot 7\cdot 8}=\underline{16}$

(2)

$|\overrightarrow{OP}|^2$

$=t^2|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{t^2}|\overrightarrow{OB}|^2$

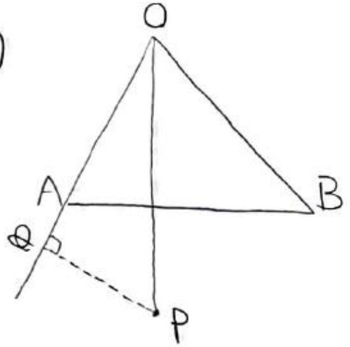
$=49t^2+\frac{64}{t^2}+32$ (相加平均)$\geqq$(相乗平均)

$\geqq 2\sqrt{49t^2\cdot\frac{64}{t^2}}+32$

$=144$ $49t^2=\frac{64}{t^2}$ $\Leftrightarrow t^4=\frac{64}{49}$ $t=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ のとき

$\min|\overrightarrow{OP}|=\underline{12}$

(3)



$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OA}$ とする.

$\overrightarrow{QP} = (t-k)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{QP}$

$= (t-k)49 + \frac{1}{t} \cdot 16 = 0$

$\Leftrightarrow t-k = -\frac{16}{49t}$

$\Leftrightarrow t + \frac{16}{49t} = k$

(相加平均) ≧ (相乗平均) より

$k \geqq 2\sqrt{t \cdot \frac{16}{49t}}$

$= 2 \cdot \frac{4}{7}$

$= \frac{8}{7}$

等号成立は $t = \frac{4}{7}$ のとき

$\min OQ = \frac{8}{7} \cdot 7 = \underline{8}$

第4問

$x \neq 0$ より

$x^2 + 11x + 31 + \frac{11}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$\downarrow\ y = x + \frac{1}{x} \quad \cdots ①$

$y^2 + \underline{11}y + \underline{29} = 0$

2つの解を y_1 と y_2 とすると

$y_1 + y_2 = -11,\ y_1y_2 = 29$

また①より

$x^2 - yx + 1 = 0$

y_1 に対する x の解を α, β

y_2 〃 γ, δ とすると

$\alpha + \beta = y_1,\ \alpha\beta = 1$

$\gamma + \delta = y_2,\ \gamma\delta = 1$

これより

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$

$= \frac{\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta}$

$= \beta + \alpha + \delta + \gamma$

$= y_1 + y_2 = \underline{-11}$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$

$= (\alpha+\beta)^2 - 2 + (\gamma+\delta)^2 - 2$

$= y_1^2 + y_2^2 - 4$

$= (y_1+y_2)^2 - 2y_1y_2 - 4$

$= 121 - 58 - 4$

$= \underline{59}$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$

$= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

$- \alpha - \alpha^2\gamma - \alpha^2\delta$

$- \beta - \beta^2\gamma - \beta^2\delta$

$- \gamma - \gamma^2\alpha - \gamma^2\beta$

$- \delta - \delta^2\alpha - \delta^2\beta$

$= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 - 1)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

$\quad - (\alpha^2+\beta^2)y_2 - (\gamma^2+\delta^2)y_1$

$= 58(-11)$

$\quad - (y_1^2 - 2)y_2 - (y_2^2 - 2)y_1$

$= 58(-11) - y_1y_2(y_1+y_2)$

$\quad + 2(y_1+y_2)$

$= 58(-11) - \underbrace{(y_1y_2 - 2)}_{27}\underbrace{(y_1+y_2)}_{-11}$

$= 31(-11) = \underline{-341}$