2021 帝京大(医) ②

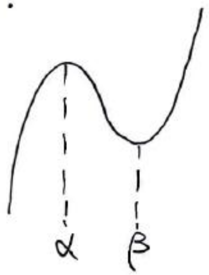
[1] (1)

$f(x)=x^3+ax^2+ax+1$

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha, \beta \ (\alpha<\beta)$

とする.



$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}$

$\alpha\beta=\frac{a}{3}$

$f(\alpha)+f(\beta)$

$=\alpha^3+\beta^3+a(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+2$

$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\quad +a\left(\frac{4a^2}{9}-\frac{2a}{3}\right)-\frac{2a^2}{3}+2$

$=-\frac{8a^3}{27}+\frac{2a^2}{3}+\frac{4a^3}{9}-\frac{2a^2}{3}$

$\quad -\frac{2a^2}{3}+2$

$=\frac{4a^3}{27}-\frac{2a^2}{3}+2=2$

$\Leftrightarrow a^2(2a-9)=0$

$\therefore \underline{a=\frac{9}{2}}$ ($a=0$だと極値をもたない)

$f'(x)=3x^2+9x+\frac{9}{2}$

$\therefore 3\alpha^2+9\alpha+\frac{9}{2}=0$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & & \\
\hline
3\ 9\ \frac{9}{2} & 1 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & 1 \\
 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & \\
\hline
 & & \frac{3}{2} & 3 & 1 \\
 & & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & \frac{9}{4} \\
\hline
 & & & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4}
\end{array}
$$

$f(\alpha)$

$=\alpha^3+\frac{9}{2}\alpha^2+\frac{9}{2}\alpha+1$

$=(3\alpha^2+9\alpha+\frac{9}{2})(\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2})$

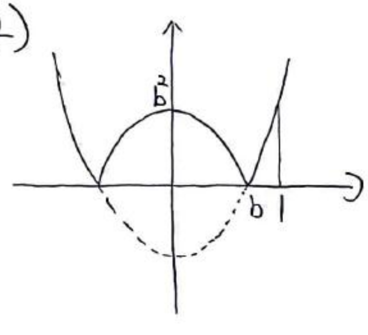
$\quad -\frac{3}{2}\alpha-\frac{5}{4}$

$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{-9-\sqrt{81-54}}{6}-\frac{5}{4}$

$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{-3-\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{4}$

$=\underline{\frac{4+3\sqrt{3}}{4}}$

(2)



$0\leqq b<1$ のとき　このとき最小値をとるでしょう

$\int_0^1|x^2-b^2|dx$

$=\int_0^b(b^2-x^2)dx+\int_b^1(x^2-b^2)dx$

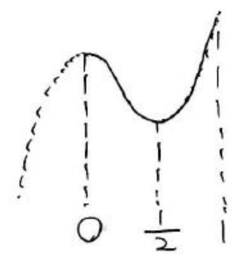
$=\left[b^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^b+\left[\frac{1}{3}x^3-b^2x\right]_b^1$

$=\frac{2}{3}b^3\times2+\frac{1}{3}-b^2$

$=\frac{4}{3}b^3-b^2+\frac{1}{3}=f(b)$

$f'(b)=4b^2-2b$

$\quad=2b(2b-1)$



$\underline{b=\frac{1}{2}}$のとき 最小値 $\underline{\frac{1}{4}}$

[2]

(1)

$t=\cos2\theta+6\sin\theta$

$=-2\sin^2\theta+6\sin\theta+1$

$=-2\left(\sin\theta-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$

$\underline{-7}\leqq\cos2\theta+6\sin\theta\leqq\underline{5}$

(2)

$y=(6-t)^2+6t$

$\quad=t^2-6t+36$

$\quad=(t-3)^2+27$　最大値 $\underline{127}$

最小値 $\underline{27}$　このとき $\cos2\theta+6\sin\theta=\underline{3}$

[3] (1)

$\log_2(a+b+c)=\log_2abc$

$\Leftrightarrow a+b+c=abc$

$\Downarrow$

$abc\leqq3c$

$\Leftrightarrow ab\leqq3$

(i) $ab=1$のとき

$a+b=0$ … NG

(ii) $ab=2$のとき ($a\leqq\sqrt{2}$)

$a+b=c$

$\Leftrightarrow a^2+2=ca$

① $ca=3$のとき

$a=1,\ b=2,\ c=3$

② $ca=4$のとき

$a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{2},\ c=2\sqrt{2}$

(iii) $ab=3$ のとき $(a \leqq \sqrt{3})$

$a+b=2c$

$\Leftrightarrow a^2+3=2ca$

① $ca=2$ のとき

$a=1,\ b=3,\ c=2 \cdots$ NG

② $ca=3$ のとき

$a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{3},\ c=\sqrt{3}$

以上より全部で $\underline{3組}$ //

$\log_2(\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{2})=\underline{\frac{5}{2}}$ //

小さい方から2番目

(2)

x^5-1

$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$\downarrow\ \alpha \neq 1$

$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

$\Leftrightarrow \alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=\underline{-1}$ //

$\downarrow$

$\alpha-\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4=-1-2\alpha^2-2\alpha^3$

2乗すると

$(\alpha-\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4)^2=1+4\alpha^4+4\alpha+4\alpha^2+8+4\alpha^3$

$=9+4(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)=\underline{5}$ //

同様に

$\beta^6+\beta^5+\beta^4+\beta^3+\beta^2+\beta+1=0$

$\Leftrightarrow 1=-\beta-\beta^2-\beta^3-\beta^4-\beta^5-\beta^6$

$\downarrow$

$1+2\beta+2\beta^2+2\beta^4=\beta+\beta^2-\beta^3+\beta^4-\beta^5-\beta^6$

2乗すると

オ

$=(1+2\beta+2\beta^2+2\beta^4)^2$

$=1+4\beta^2+4\beta^4+4\beta$

$+4\beta+8\beta^3+8\beta^6+4\beta^2+4\beta^4+8\beta^5$

$=1+8\underbrace{(\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6)}_{-1}$

$=\underline{-7}$ //

[4]

n回目 　 n+1回目

A当 $P_n \longrightarrow P_{n+1}$

B当 $1-P_n$

(1) $P_1=\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\right)\underbrace{P_0}_{1}+\frac{1}{4}(1-P_0)$

$=\underline{\frac{7}{8}}$ //

(2)

$P_{n+1}=\frac{7}{8}P_n+\frac{1}{4}(1-P_n)$

$=\underline{\frac{5}{8}}P_n+\underline{\frac{1}{4}}$ //

$P_0=エ+オ=1$

$-)\ P_1=エ+\frac{5}{8}オ=\frac{7}{8}$

$\frac{3}{8}オ=\frac{1}{8}$

$オ=\frac{1}{3}\quad エ=\frac{2}{3}$

$\therefore P_n=\underline{\frac{2}{3}}+\underline{\frac{1}{3}}\left(\frac{5}{8}\right)^n$ //