2021 慶應理工

1.(1)

$l: (2x-y)t^2+(-4x+4)t+2x-2y+2=0$

↓ tによらない

$\begin{cases} 2x-y=0 \\ -4x+4=0 \\ 2x-2y+2=0 \end{cases}$ 定点は $\underline{(1,2)}$

(2)

$f(t)=\dfrac{2t^2-4t+2}{t^2+2}$

$f'(t)$

$=\dfrac{(4t-4)(t^2+2)-(2t^2-4t+2)2t}{(t^2+2)^2}$

$=\dfrac{4(t^2+t-2)}{(t^2+2)^2}$

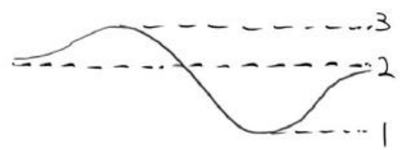
$=\dfrac{4(t+2)(t-1)}{(t^2+2)^2}$

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	3	↘	0	↗

$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)=2$

$\underline{t=1}$ のとき $f(t)$ は最小.

$\underline{t=-2}$ のとき $f(t)$ は最大.

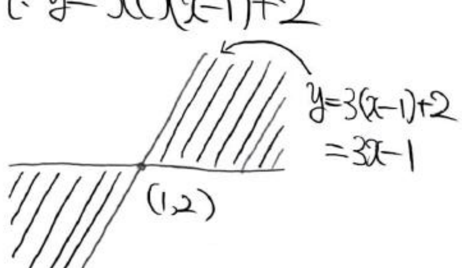


$f(t)=a$ が1つの実数解をもつのは

$\underline{a=0,2,3}$ のとき.

(3)

$l: y=f(t)(x-1)+2$



放物線の頂点 $(k,\frac{1}{2}(k-1)^2)$

放物線とSが共有点をもつには

$\frac{1}{2}(k-1)^2 \leqq 2 \cdots ①$

または

$y=3x-1$ と放物線が共有する $\cdots ②$

①は

$(k-1)^2\leqq 4 \iff -1\leqq k\leqq 3$

②は

$\frac{1}{2}x^2-kx+k^2-k+\frac{1}{2}=3x-1$

$\iff x^2-2(k+3)x+2k^2-2k+3=0$

で

$\frac{D}{4}=(k+3)^2-(2k^2-2k+3)$

$=-k^2+8k+6\geqq 0$

$\iff 4-\sqrt{22}\leqq k\leqq 4+\sqrt{22}$

①または②より $\underline{-1\leqq k\leqq 4+\sqrt{22}}$

2.

(1)

$(\alpha+1)^2(\alpha+2)^5$

$=(\alpha^2+3\alpha+2)^2(\alpha+2)^3$

$=(-1)^2(\alpha^2+4\alpha+4)(\alpha+2)$

$=(\alpha+1)(\alpha+2)=\underline{-1}$

$(\alpha+3)^2=\alpha^2+6\alpha+9$

$=3\alpha+6$

$=3(\alpha+2)$

より t の偶奇で場合分け.

(i) $t=2m$ $(m\in\mathbb{Z})$ のとき

$(\alpha+2)^5(\alpha+3)^{2m}$

$=(\alpha+2)^5\{3(\alpha+2)\}^m$

$=3^m(\alpha+2)^{5+m}=3 \cdots ①$

ここで

$(\alpha+2)^2=\alpha+1$

$(\alpha+2)^3=(\alpha+1)(\alpha+2)=-1$

$(\alpha+2)^4=-\alpha-2$

$(\alpha+2)^5=-(\alpha+2)^2=-\alpha-1$

$(\alpha+2)^6=-(\alpha+1)(\alpha+2)=1$

より $(\alpha+2)^k$ は k を6で割った余りで分類すると

6で割った余り	0	1	2	3	4	5
$(\alpha+2)^k$	1	$\alpha+2$	$\alpha+1$	-1	$-\alpha-2$	$-\alpha-1$

これより $(\alpha+2)^{5+m}$ は ①より正の実数なので1となるしかない.

$\therefore 3^m=3 \iff m=1$

$5+m=5+1=6l$ $(l\in\mathbb{Z})$

$\iff 5=6l-1$

(ii) $t=2m+1$ $(m\in\mathbb{Z})$ のとき

$(\alpha+2)^5(\alpha+3)^t$

$=(\alpha+2)^5\{3(\alpha+2)\}^m(\alpha+3)$

$=3^m(\alpha+2)^{5+m}(\alpha+3)=3$

両辺2乗して

$3^{2m}(\alpha+2)^{2s+2m}\underbrace{(\alpha+3)^2}_{3(\alpha+2)}=9$

$\Leftrightarrow 3^{2m}(\alpha+2)^{2s+2m+1}=3$

同様に $(\alpha+2)^{2s+2m+1}=1$ と限られるが $3^{2m}=3$ となる整数mは存在しない.

(i)(ii)より求めるs,tの組は

$(s,t)=(6l-1,\ 2)$ (lは整数) //

(2)

$(x+1)^3(x+2)^2$

$=(x+1)(x^2+3x+2)^2$

$=(x+1)\{(x^2+3x+3)-1\}^2$

$=(x+1)\{(x^2+3x+3)-2\}(x^2+3x+3)$
$\quad +x+1$

$=(x^3+4x^2+4x+1)(x^2+3x+3)+x+1$ //

$(x+1)^{2021}=(x^2+3x+3)Q(x)$
$\quad +ax+b$

とおく. $x=\alpha$ とすると

$(\alpha+1)^{2021}=a\alpha+b$

左辺を変形すると

$(\alpha+1)^{2021}=(\alpha+1)^{6\times336+5}$

$=(\alpha+1)^5\cdot1^{336}$

$=-\alpha-2$

これより $a=-1,\ b=-2$.

求める余りは $-x-2$ //

3. 5以上を↑, 5未満を↓とする.

(1)

$P(B_1)$

$=P(\uparrow\downarrow\uparrow$ または $\downarrow\uparrow\uparrow)$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$

$=\frac{4}{27}$ //

(2)

n=2のとき

$P(B_2)$

$=P(\downarrow\times2,\uparrow\times2)$
$\quad +P(\downarrow\times2,\uparrow\times3)$

$=P(\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow)$
$\quad +P(\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow,\ \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow)$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$
$\quad +{}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$=\frac{12+8+4}{3^5}=\frac{8}{3^4}$

$P(B_2\cap A)$

$=\frac{12+8}{3^5}$

$\therefore P_{B_2}(A)=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$ //

(3)

$P_{B_k}(A)=\frac{P(B_k\cap A)}{P(B_k)}=1$

$\Leftrightarrow P(B_k)=P(B_k\cap A)$

この両辺が等しいときは, 繰り返す回数が2n+1回に到達しないときである. つまり2n+1回に到達するのは

$\underbrace{\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\cdots\uparrow\downarrow\uparrow}_{2n+1}$

少なくとも↓がn以上のときなので

$P_{B_k}(A)=1$ となるkの範囲は

$0\leqq k\leqq n-1$. $\therefore k_n=n-1$ //

(4)

P_k

$=P(A\cap B_k)$

$=P(\downarrow\times k,\uparrow\times2)$
$\quad +P(\downarrow\times k,\uparrow\times3)$
$\quad \vdots$
$\quad +P(\downarrow\times k,\uparrow\times(k+2))$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^2$
$\quad +{}_kC_1\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^3$
$\quad +{}_kC_2\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^4$
$\quad \vdots$
$\quad +{}_kC_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^2\sum_{i=0}^{k}{}_kC_i\left(\frac{1}{3}\right)^i$

$=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(1+\frac{1}{3}\right)^k$

$=\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^k$ //

$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}k\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^k$

⇓

$S_n=\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}+\frac{2}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^2+\cdots+\frac{n-1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$

$\frac{8}{9}S_n=\quad\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^2+\cdots+\frac{n-2}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}+\frac{n-1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^n$

$\frac{1}{9}S_n=\frac{1}{9}\left\{\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}\right\}-\frac{n-1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^n$

$S_n=\frac{\frac{8}{9}-\left(\frac{8}{9}\right)^n}{1-\frac{8}{9}}-(n-1)\left(\frac{8}{9}\right)^n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{8}{9}}{1-\frac{8}{9}}$

$=8$ //

4.

(1)

$f(x)=\log(1+ax)-a\left(x-\frac{x^2}{4}\right)$ とおく

$f'(x)=\frac{a}{1+ax}-a\left(1-\frac{x}{2}\right)$

$=a\left(\frac{1}{1+ax}-1+\frac{x}{2}\right)$

$=a\times\frac{2-2(1+ax)+x(1+ax)}{2(1+ax)}$

$=a\times\frac{-2ax+x+ax^2}{2(1+ax)}$

$=\frac{ax(-2a+1+ax)}{2(1+ax)}$

$=\frac{ax\{1+a(x-2)\}}{2(1+ax)}$

ここで

$1+a(x-2)$

$\geqq 1-2a\geqq 0$ より $f'(x)\geqq 0$

$f(x)$は単調増加であり

$f(0)=0$ より $f(x)\geqq 0$

$\therefore a\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\leqq\log(1+ax)$

(2)

$g(x)=bx-\log\left(1+\frac{1}{2}x\right)$ とする.

$g'(x)=b-\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}x}$

$=b-\frac{1}{2+x}$

$\geqq b-\frac{1}{2}$

$g(0)=0$ より $g(x)\geqq 0$ となるには

$g'(x)\geqq 0$ であることが必要

つまり $g'(x)\geqq b-\frac{1}{2}\geqq 0$

$\therefore b\geqq\frac{1}{2}$

bの最小値は $\underline{\frac{1}{2}}$

(3)

(1)(2)より $a=b=\frac{1}{2}$ として

$\frac{1}{2}\left(tx-\frac{t^2x^2}{4}\right)\leqq\log\left(1+\frac{1}{2}tx\right)\leqq\frac{1}{2}tx$

$\Leftrightarrow\frac{4x-tx^2}{8(1+x)}\leqq\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}tx\right)}{t(1+x)}\leqq\frac{x}{2(1+x)}$ …①

ここで

$\int\frac{x}{1+x}dx$

$=\int\frac{u-1}{u}du$

$=u-\log|u|+C$

$=x+1-\log|x+1|+C$

①を $0\leqq x\leqq\frac{k}{n}$ で積分すると

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{x}{1+x}dx-\frac{t}{8}\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{x^2}{1+x}dx$

$\leqq\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}tx\right)}{t(1+x)}dx\leqq\frac{1}{2}\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{x}{1+x}dx$

すべての辺で $t\to+0$ とすると

$I(n,k)$

$=\lim_{t\to+0}\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}tx\right)}{t(1+x)}dx$

$=\frac{1}{2}\left[x+1-\log|x+1|\right]_0^{\frac{k}{n}}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}-\log\left|\frac{k}{n}+1\right|\right)$

$=\underline{\frac{1}{2}\left\{\frac{k}{n}-\log\left(\frac{k}{n}+1\right)\right\}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(n,k)$

$=\int_0^1\frac{1}{2}\{x-\log(x+1)\}dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-(x+1)\log(x+1)+x\right]_0^1$

$=\underline{\frac{3}{4}-\log 2}$

5.

(1) $\vec{n}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$

$\vec{OP}=s\vec{u}+t\vec{n}$ より

$\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$

$\begin{cases}1=sa-tb & \Leftrightarrow b=sab-tb^2\\ 1=sb+ta & \Leftrightarrow a=sab+ta^2\end{cases}$

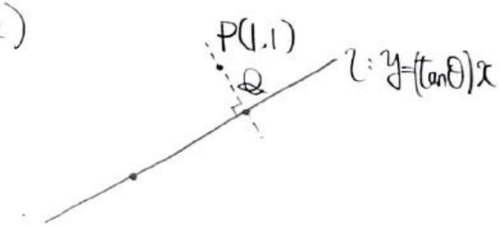
$b-a=-t$

$1=sa+(b-a)b$

$\Leftrightarrow\underbrace{1-b^2}_{a^2}=sa-ab$

$\therefore\underline{s=a+b},\ \underline{t=a-b}$

(2)



$PQ=\frac{|\tan\theta-1|}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$

$=\frac{|\tan\theta-1|}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}}$

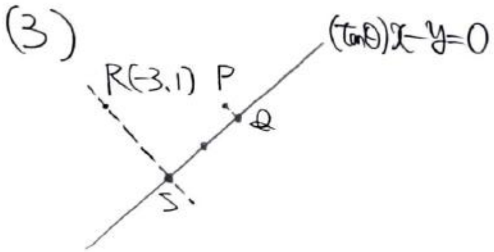
$$= \frac{|\tan\theta - 1|}{\frac{1}{|\cos\theta|}}$$

$$= |\sin\theta - \cos\theta|$$

$$= \left|\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$\underline{\theta = -\frac{\pi}{4}}$ のとき最大 //

(3)



直線PQ：$\begin{cases} x = 1 + (\tan\theta)k \\ y = 1 - k \end{cases}$

と連立すると

$$\tan\theta + (\tan^2\theta)k - 1 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\theta}k = 1 - \tan\theta$$

$$\Leftrightarrow k = \cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta$$

$$x = 1 + \sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta$$
$$= \cos\theta(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$y = 1 - \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta$$
$$= \sin\theta(\sin\theta + \cos\theta)$$

直線RS：$\begin{cases} x = -3 + (\tan\theta)k \\ y = 1 - k \end{cases}$

と連立すると

$$-3\tan\theta + (\tan^2\theta)k - 1 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\theta}k = 1 + 3\tan\theta$$

$$\Leftrightarrow k = \cos^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta$$

$$x = -3 + \sin\theta\cos\theta + 3\sin^2\theta$$
$$= \cos\theta(\sin\theta - 3\cos\theta)$$

$$y = \sin\theta(\sin\theta - 3\cos\theta)$$

よって

$$Q(\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta), \sin\theta(\sin\theta + \cos\theta))$$

$$S(\cos\theta(\sin\theta - 3\cos\theta), \sin\theta(\sin\theta - 3\cos\theta))$$

より $T(x, y)$ について

$$x = \frac{3\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta) + \cos\theta(\sin\theta - 3\cos\theta)}{1+3}$$

$$= \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$y = \frac{3\sin\theta(\sin\theta + \cos\theta) + \sin\theta(\sin\theta - 3\cos\theta)}{1+3}$$

$$= \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin 2\theta = 2x, \quad \cos 2\theta = 1 - 2y$$

$$\Downarrow$$

$$4x^2 + (1 - 2y)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{x^2 + y^2 - y = 0} \;//$$

(4)

$$RS = \frac{|-3\tan\theta - 1|}{\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

$$= |-3\sin\theta - \cos\theta|$$

$$PQ^2 + RS^2$$

$$= (\sin\theta - \cos\theta)^2 + (3\sin\theta + \cos\theta)^2$$

$$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta + 1 + 6\sin\theta\cos\theta + 8\sin^2\theta$$

$$= 2 + 8\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2 + 4(1 - \cos 2\theta) + 2\sin 2\theta$$

$$= 2(\sin 2\theta - 2\cos 2\theta) + 6$$

$$= 2\sqrt{5}\left(\sin 2\theta \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\cos\alpha} - \cos 2\theta \times \underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}}_{\sin\alpha}\right) + 6$$

$$= 2\sqrt{5}\sin(2\theta - \alpha) + 6$$

$$(-\pi < \theta \leqq \pi)$$

最大値は $\underline{2\sqrt{5} + 6}$ //

※(2)以降，(1)の結果を
利用せず解いているのでご注意を．