・2021 慶應(医)

[I]

(1) $|-5\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}|^2=|-8\overrightarrow{OC}|^2$

$25-70\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+49=64$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{7}$

$|7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}|^2=|5\overrightarrow{OA}|^2$

$49+112\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+64=25$

$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{11}{14}$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2$

$=2-2\left(-\frac{11}{14}\right)$

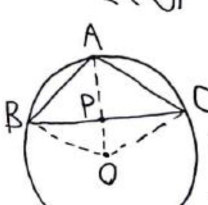
$=\frac{25}{7}$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|=BC=\frac{5}{\sqrt{7}}$

$5\overrightarrow{OA}=7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}$

$\iff \underbrace{\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}}_{\overrightarrow{OP}}=\frac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{15}$

$\therefore OP=\frac{1}{3}$



$\triangle ABC$

$=2\times\triangle OBC$

$=\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-\left(-\frac{11}{14}\right)^2}$

$=\sqrt{1-\frac{11^2}{14^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

(2) $x^\alpha-mx=0$

$x(x^{\alpha-1}-m)=0$

$\therefore x=0,\ m^{\frac{1}{\alpha-1}}$

V

$=\int_0^{m^{\frac{1}{\alpha-1}}}\pi(x^\alpha-mx)^2dx$

$=\pi\int_0^{m^{\frac{1}{\alpha-1}}}(x^{2\alpha}-2mx^{\alpha+1}+m^2x^2)dx$

$=\pi\left[\frac{1}{2\alpha+1}x^{2\alpha+1}-\frac{2m}{\alpha+2}x^{\alpha+2}+\frac{m^2}{3}x^3\right]_0^{m^{\frac{1}{\alpha-1}}}$

$=\pi\left(\frac{1}{2\alpha+1}m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}-\frac{2}{\alpha+2}m^{\frac{\alpha+2}{\alpha-1}+1}+\frac{1}{3}m^{\frac{3}{\alpha-1}+2}\right)$

$=\pi m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}\left(\frac{1}{2\alpha+1}-\frac{2}{\alpha+2}+\frac{1}{3}\right)$

$=\cdots$

$=\frac{2(\alpha-1)^2}{3(2\alpha+1)(\alpha+2)}\pi m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}$

$\lim_{\alpha\to+0}V=\frac{\pi}{3m}$

$m^3V=\frac{2(\alpha-1)^2}{3(2\alpha+1)(\alpha+2)}\pi m^{\frac{5\alpha-2}{\alpha-1}}$

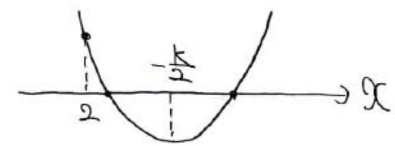
$m\to\infty$としてこれが0でない値に収束するのは $\frac{5\alpha-2}{\alpha-1}=0$ $\therefore \alpha=\frac{2}{5}$

(3) $D=k^2-4k-140$

$=(k+10)(k-14)$

$D>0 \iff k<-10,\ 14<k$

$n(A)=201-25=176$



端 $f(2)=3k+39>0$

$\iff k>-13$

軸 $-\frac{k}{2}>2 \iff k<-4$

判 $D>0 \iff k<-10,\ 14<k$

$\therefore -13<k<-10$

$n(A\cap B)=2$

$D=0 \iff k=-10,\ 14$

$k=-10$のとき実部は2より大きい。

$D<0 \iff -10<k<14$.

また実部がともに2より大きいなら

$\alpha_k+\alpha_\beta=-k>4$

$\iff k<-4$

$A\cap B$であるのは $-10\leqq k<-4$

$\therefore n(A\cap B)=6$

α_k,β_kがともに整数になるのは

$\begin{cases}\alpha_k+\beta_k=-k\\ \alpha_k\beta_k=k+35\end{cases}$

↓

$\alpha_k\beta_k+\alpha_k+\beta_k=35$

$\iff (\alpha_k+1)(\beta_k+1)=36$

$(\alpha_k+1,\beta_k+1)=(36,1),(18,2),(12,3),(9,4),(-1,-36),(-2,-18),(-3,-12),(-4,-9)$

$\alpha_k>\beta_k$ とする.

$n(A\cap C)=8$

$\alpha_k=m+ni,\ \beta_k=m-ni$ とする.

$\alpha_k+\beta_k=2m=-k$

$\alpha_k\beta_k=m^2+n^2=k+35$

↓

$m^2+n^2=-2m+35$

$\iff (m+1)^2+n^2=36$

$(m+1,n)=(6,0),(-6,0),(0,6),(0,-6)$

$m=5,-7,-1$ より

$n(A\cap C)=3$

[II]

(1)

$\bar{x}=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)$

$=\frac{1}{2}(n+1)$ //

$S_x^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{4}(n+1)^2$

$=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}(n+1)^2$

$=\cdots=\frac{n^2-1}{12}$ //

(2)

S_{xy}

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$

$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{n}x_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}y_i+n\bar{x}\cdot\bar{y}\right)$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\cdot\bar{y}$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{4}(n+1)^2$

$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{n(n+1)^2}{4}\right)$

$n=2(2m+1)$ (mは整数) とおく.

$\frac{n(n+1)^2}{4}=\frac{(2m+1)(4m+3)^2}{2}$

これは $2m+1$, $4m+3$ が奇数なので整数でないが, $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ は整数

よって $S_{xy}\neq 0$.

(3)

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i^2$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_iy_i+y_i^2)$

$=\underbrace{S_x^2}+\underbrace{(\bar{x})^2}-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\underbrace{S_y^2}_{S_x^2}+\underbrace{(\bar{y})^2}_{(\bar{x})^2}$

$=\frac{n^2-1}{6}+\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\frac{n^2-1}{12}+\frac{1}{4}(n+1)^2-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}d_i^2$

$\Leftrightarrow S_{xy}=\frac{n^2-1}{12}-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}d_i^2$

$\downarrow$

$r=1-\frac{1}{2n}\cdot\frac{12}{n^2-1}\sum_{i=1}^{n}d_i^2$

$=1-\frac{6}{n^3-n}(d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2)$ //

(4) $d_i=0\Leftrightarrow y_i=x_i$ のとき

rは最大値 1 //

y_iが大きくなるとx_iが小さくなるとき, つまり $y_i=n+1-x_i$ のとき //

r

$=1-\frac{6}{n^3-n}\sum_{i=1}^{n}(n+1-2x_i)^2$

$=1-\frac{6}{n^3-n}\sum_{i=1}^{n}\{(n+1)^2-2(n+1)x_i+4x_i^2\}$

$=1-\frac{6(n+1)^2}{n^2-1}+\frac{12}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2}(n+1)-\frac{24}{n^3-n}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

$=\cdots$

$=-1$ //

[III]

(1)

$P(X,Y)$とすると相似に注目して

$AP:QP=h:g$

$\Leftrightarrow gAP=hQP$

2乗して

$g^2\{X^2+(1-Y)^2\}=h^2\{(T-X)^2+(1-Y)^2\}$

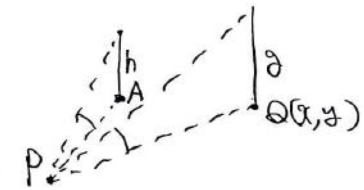
$\Leftrightarrow (g^2-h^2)(X^2+Y^2-2Y+1)+2h^2TX-h^2T^2=0$

$\Leftrightarrow X^2+\frac{2h^2T}{g^2-h^2}X+(Y-1)^2-\frac{h^2T^2}{g^2-h^2}=0$

$\Leftrightarrow \left(X-\frac{2h^2T}{h^2-g^2}\right)^2+(Y-1)^2=\frac{g^2h^2T^2}{(h^2-g^2)^2}$

Pは中心$\left(\frac{h^2T}{h^2-g^2},1\right)$, 半径$\frac{ghT}{|h^2-g^2|}$の円周上にある.

(2)



$P(0,Y)$として同様に

$g^2(Y-1)^2=h^2\{x^2+(Y-y)^2\}$

$\Leftrightarrow (h^2-g^2)Y^2-2(h^2y-g^2)Y-g^2+h^2x^2+h^2y^2=0$

このYの2次方程式が重解であればいい.

$\frac{D}{4}$

$=(h^2y-g^2)^2-(h^2-g^2)(-g^2+h^2x^2+h^2y^2)$

$=g^2h^2y^2-2g^2h^2y+g^2h^2-h^2(h^2-g^2)x^2$

$=0$

$\Leftrightarrow g^2(y-1)^2=(h^2-g^2)x^2$

これをみたす(x,y)が存在するには

$h^2-g^2 \geqq 0$ つまり $\underline{h>g}$ $(h \neq g)$ //
が必要. Qは

$g(y-1)=\pm\sqrt{h^2-g^2}\,x$

$\therefore\ y=\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1$

または

$y=-\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1$ //

にある.

(3) $P(X,0)$として同様に

$g^2(X^2+1)=h^2\{(X-x)^2+y^2\}$

$\Leftrightarrow (h^2-g^2)X^2-2h^2xX-g^2$
$+h^2x^2+h^2y^2=0$

$\frac{D}{4}$

$=h^4x^2-(h^2-g^2)(-g^2+h^2x^2+h^2y^2)$

$=g^2h^2x^2-h^2(h^2-g^2)y^2+g^2(h^2-g^2)$

$=0$

$\Leftrightarrow \frac{h^2}{g^2-h^2}x^2+\frac{h^2}{g^2}y^2=1$

$\downarrow$

$\underline{\frac{h^2}{g^2-h^2}}x^2+\underline{0}\cdot x+\underline{\frac{h^2}{g^2}}y^2+\underline{0}\cdot y=1$ // // // //

Cが楕円なのは $\underline{g>h}$ のとき //

$\sqrt{\frac{g^2}{h^2}-\frac{g^2-h^2}{h^2}}=1$

2つの焦点は $\underline{(0,1)}$, $\underline{(0,-1)}$ // //

上でないときCは双曲線

$\sqrt{\frac{g^2}{h^2}+\frac{h^2-g^2}{h^2}}=1$

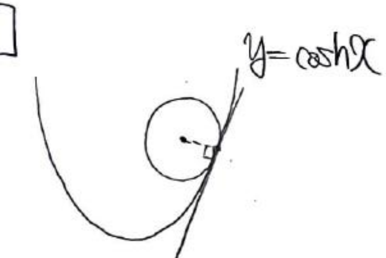
2つの焦点は $\underline{(0,1)}$, $\underline{(0,-1)}$ // //

直角双曲線になるのは

$h^2-g^2=g^2 \Leftrightarrow h^2=2g^2$

$\therefore\ \frac{h}{g}=\underline{\sqrt{2}}$ //

[IV]



CのPでの接線

$y=\sinh t\,(x-t)+\cosh t$

傾きの積に関して

$\sinh t\cdot\frac{\cosh t-Y}{t-X}=-1$

$\Leftrightarrow \sinh t(\cosh t-Y)=X-t$ …①

また接点と円の中心の距離は

rより

$(t-X)^2+(\cosh t-Y)^2=r^2$ …②

①,②より X 消すと

$\sinh^2 t(\cosh t-Y)^2+(\cosh t-Y)^2=r^2$

$\Leftrightarrow \underbrace{(\sinh^2 t+1)}_{\cosh^2 t}(\cosh t-Y)^2=r^2$

$\Leftrightarrow (\cosh t-Y)^2=\frac{r^2}{\cosh^2 t}$

$\therefore\ Y-\cosh t=\frac{r}{\cosh t}$

$Y=\frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{2}{e^t+e^{-t}}r$ //

①に戻して …☆

$X=t+\sinh t\left(-\frac{r}{\cosh t}\right)$

$=t-\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}r$ //

$X(t)=t-\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}r>0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{r}t>\underbrace{\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}}_{f(t)}$ …③

$f'(t)=\cdots=\frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}>0$

$f''(t)=\cdots=-\frac{8(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^3}<0$

$f(t)$は上に凸, $f'(0)=1$より

③が成り立つには

$\frac{1}{r}\geqq 1$ $\therefore\ \underline{0<r\leqq 1}$ //

AM≧GMより

$Y\geqq 2\sqrt{\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{2}{e^t+e^{-t}}r}=2\sqrt{r}$

等号成立は $\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\frac{2}{e^t+e^{-t}}r$

つまり $\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\sqrt{r}$ 解くと

$t=\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$ のとき最小値 $2\sqrt{r}$ //

$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+1$

$=\left(\frac{dY}{dt}\cdot\frac{dt}{dX}\right)^2+1$

$=\left\{\frac{(Y(t))'}{(X(t))'}\right\}^2+1$

☆より

$=\cdots$ $\qquad \cosh^2 t-\cosh t\cdot Y+r=0$

$=\cosh^2 t$ $\qquad \therefore\ \cosh t=\frac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}$

$=\left(\frac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}\right)^2=\frac{Y^2+Y\sqrt{Y^2-4r}-2r}{2}$ //