2021 東京慈恵会医科大

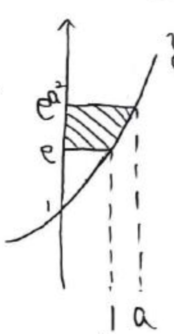
1. $1\sim4\to○ \cdots X$
$5,6\to ○ \cdots Y$ とおく

7個並び, 左から3個目が赤、なのは

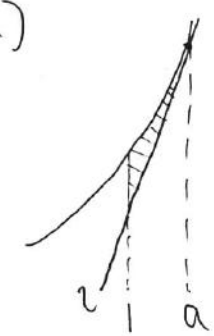
$P(XXYXY)+P(XXYYX)$
$+P(YYXXX)$
$=\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\times3=\frac{8}{81}$ //

また左から5個目が赤なのは

$P(XXXXY)+P(YXXY?)$
$+P(XYXY?)+P(XXYY?)$
$+P(YYY??)$
$=\left(\frac{2}{3}\right)^4\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times3+\left(\frac{1}{3}\right)^3$
$=\frac{16+36+9}{3^5}=\frac{61}{243}$ //

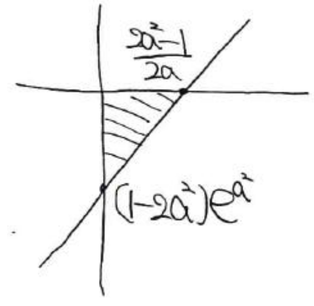
2.

$y=e^{x^2}$
$\Leftrightarrow x^2=\log y$

(1)
V
$=\int_e^{e^{a^2}}x^2\pi\,dy$
$=\pi\int_e^{e^{a^2}}\log y\,dy$
$=\pi\left[y\log y-y\right]_e^{e^{a^2}}$
$=\pi\{e^{a^2}\cdot a^2-e^{a^2}-(e-e)\}$
$=\pi(a^2-1)e^{a^2}$

(2)


$l: y=2a\cdot e^{a^2}(x-a)+e^{a^2}$
$=2a\cdot e^{a^2}\cdot x+(1-2a^2)e^{a^2}$

S_1
$=\int_1^a\{e^{x^2}-2ae^{a^2}x-(1-2a^2)e^{a^2}\}dx$
$=\int_1^a e^{x^2}dx$
$-ae^{a^2}\left[x^2\right]_1^a-(1-2a^2)e^{a^2}(a-1)$
$=\int_1^a e^{x^2}dx$
$-ae^{a^2}(a^2-1)+(2a^2-1)e^{a^2}(a-1)$
$=\int_1^a e^{x^2}dx$
$-(a-1)e^{a^2}\{a^2+a-2a^2+1\}$
$=\int_1^a e^{x^2}dx+(a-1)e^{a^2}(a^2-a-1)$



S_2
$=\frac{2a^2-1}{2a}\cdot(2a^2-1)e^{a^2}\cdot\frac{1}{2}$
$=\frac{(2a^2-1)^2}{4a}e^{a^2}$

$\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}$
$=\lim_{a\to\infty}\left\{\frac{4a\int_1^a e^{x^2}dx}{(2a^2-1)^2e^{a^2}}+\frac{(4a^2-4a)(a^2-a-1)}{(2a^2-1)^2}\right\}$
$=0+1$
$=1$

ここで $x\geqq1$ において
$e^x\leqq e^{x^2}\leqq xe^{x^2}$
$1\leqq x\leqq a$ で積分すると
$\int_1^a e^x dx\leqq\int_1^a e^{x^2}dx\leqq\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_1^a$
$\therefore e^a-1\leqq\int_1^a e^{x^2}dx\leqq\frac{1}{2}(e^{a^2}-1)$
$\therefore \frac{4a(e^a-1)}{(2a^2-1)^2e^{a^2}}\leqq\frac{4a\int_1^a e^{x^2}dx}{(2a^2-1)^2e^{a^2}}$
$\leqq\frac{4a(e^{a^2}-1)}{2(2a^2-1)^2e^{a^2}}$

$\lim_{a\to\infty}\frac{4a(e^a-1)}{(2a^2-1)^2e^{a^2}}$
$=\lim_{a\to\infty}\frac{4\left(1-\frac{1}{e^a}\right)}{\left(4a^3-4a+\frac{1}{a}\right)e^{a^2-a}}=0$

$\lim_{a\to\infty}\frac{4a(e^{a^2}-1)}{2(2a^2-1)^2e^{a^2}}$
$=\lim_{a\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{1}{e^{a^2}}\right)}{\left(4a^3-4a+\frac{1}{a}\right)}=0$

より
$\lim_{a\to\infty}\frac{4a\int_1^a e^{x^2}dx}{(2a^2-1)^2e^{a^2}}=0$
となることを用いた、

3.

(1)

$\sin 2ax \leqq 0$

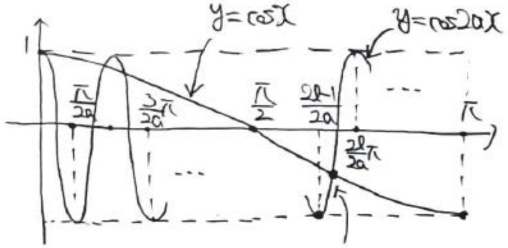
$(2l-1)\pi \leqq 2ax \leqq 2l\pi$

$(l=1,2,\cdots,a)$

$\frac{2l-1}{2a}\pi \leqq x \leqq \frac{2l}{2a}\pi$

$(l=1,2,\cdots,a)$

$\cos x$ と $\cos 2ax$ のグラフを書くと



ここの x 座標を α_l とする.

$\begin{cases} \cos x \leqq \cos 2ax \\ \sin 2ax \leqq 0 \end{cases}$

の範囲は図より

$\alpha_l \leqq x \leqq \frac{2l}{2a}\pi = \frac{l}{a}\pi$

$(l=1,2,\cdots,a)$

ここで α_l は

$\cos\alpha_l = \cos 2a\alpha_l$

$\therefore \alpha_l = 2l\pi - 2a\alpha_l$

$\therefore \alpha_l = \frac{2l}{2a+1}\pi$

これより a 個の閉区間があるので

$n=a$ であり, $l=k$ とできる.

$x_k = \frac{k}{a}\pi - \alpha_k$

$= \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{2a+1}\right)k\pi$

$= \frac{k\pi}{(2a+1)a}$

$\therefore \theta_k = 2b(2a+1)\frac{k\pi}{(2a+1)a}$

$= 2k\pi\frac{b}{a}$

$(k=1,2,\cdots,a)$

(2)

$kb = aq_k + r_k \ (k=1,2,\cdots,a)$

ここで $1 \leqq i < j < a$ に関して

$r_i = r_j$ とする i, j が存在したとする.

$r_j - r_i = jb - aq_j - (ib - aq_i)$

$\equiv (j-i)b \pmod{a}$

$\equiv 0 \pmod{a}$

a と b は互いに素なので $j-i$ が

a の倍数であるが

$1 \leqq j-i \leqq a-1$ により a の

倍数とならないので矛盾. $\therefore r_i \neq r_j$.

$\theta_k = \frac{kb}{a}2\pi \ (k=1,2,\cdots,a)$

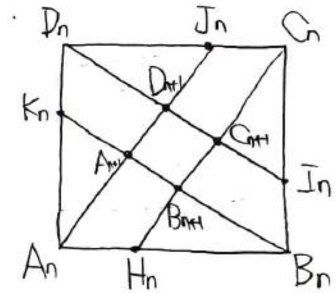
ここで kb を a で割った余りは

k の値によってすべて異なるので

$z_1, \cdots, z_a$ は単位円上に a 等分

された分点である.

4.



四角形 $A_nB_nC_nD_n$ が正方形で

あることを示す.

(i) $n=1$ のとき仮定より正方形.

(ii) $n=k$ のとき正方形とする.

$A_k(0,0), B_k(e_k, 0)$

$C_k(e_k, e_k), D_k(0, e_k)$

とおいて一般性を失わない.

直線 A_kJ_k: $y = \frac{1}{1-t}x \cdots ①$

直線 B_kK_k:

$y = -(1-t)x + (1-t)e_k$

$\cdots ②$

連立すると

$\frac{1}{1-t}x = -(1-t)x + (1-t)e_k$

$\{(1-t)^2+1\}x = (1-t)^2 e_k$

$x = \frac{(1-t)^2}{t^2-2t+2}e_k$

$A_{k+1}\left(\frac{(1-t)^2}{t^2-2t+2}e_k, \frac{1-t}{t^2-2t+2}e_k\right)$

直線 D_kI_k:

$y = -(1-t)x + e_k \cdots ③$

①と連立すると

$\frac{1}{1-t}x = -(1-t)x + e_k$

$\therefore x = \frac{1-t}{t^2-2t+2}e_k$

$D_{k+1}\left(\frac{1-t}{t^2-2t+2}e_k, \frac{1}{t^2-2t+2}e_k\right)$

直線 C_kH_k:

$y = \frac{1}{1-t}(x - te_k) \cdots ④$

ここで①,④と②,③が傾きが等しいので平行. ①,④と②,③はそれぞれ傾きの積が -1 になるので垂直.

以上から $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}$ は

長方形である.

②,④連立すると

$$\frac{1}{1-t}(x-te_k)=-(1-t)x+(1-t)e_k$$

$$\Leftrightarrow (1-t)^2x+x-te_k=(1-t)^2e_k$$

$$\Leftrightarrow (t^2-2t+2)x=(1-t)^2e_k+te_k$$

$$\therefore x=\frac{(1-t)^2e_k+te_k}{t^2-2t+2}$$

$$B_{k+1}\left(\frac{(1-t)^2e_k+te_k}{t^2-2t+2},\ \frac{(1-t)e_k+t(t-1)e_k}{t^2-2t+2}\right)$$

$$\frac{1}{1-t}\left\{\frac{(1-t)^2e_k+te_k}{t^2-2t+2}-te_k\right\}$$

$$=\frac{1}{1-t}\cdot\frac{(1-t)^2e_k+(t-t^3+2t^2-2t)e_k}{t^2-2t+2}$$

$$=\frac{1}{1-t}\cdot\frac{(1-t)^2e_k-t(t^2-2t+1)e_k}{t^2-2t+2}$$

$A_{k+1}D_{k+1}$

$$=\sqrt{\left\{\frac{(1-t)e_k}{t^2-2t+2}(-t)\right\}^2+\left\{\frac{te_k}{t^2-2t+2}\right\}^2}$$

$$=\frac{te_k}{t^2-2t+2}\sqrt{(1-t)^2+1}$$

$$=\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}e_k$$

$A_{k+1}B_{k+1}$

$$=\sqrt{\left(\frac{te_k}{t^2-2t+2}\right)^2+\left(\frac{t(t-1)e_k}{t^2-2t+2}\right)^2}$$

$$=\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}e_k$$

より四角形$A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}$は長方形

(i)(ii)より四角形$A_nB_nC_nD_n$は正方形、

さらに四角形$A_nB_nC_nD_n$と四角形$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$の面積比は

$$1:\frac{t^2}{t^2-2t+2}$$

正方形$A_1B_1C_1D_1$の面積が1なので正方形$A_nB_nC_nD_n$の面積は

$$\left(\frac{t^2}{t^2-2t+2}\right)^{n-1}$$

これより

a_n

$$=\left(\frac{t^2}{t^2-2t+2}\right)^{n-1}\times(1-t)\times\frac{(1-t)^2}{t^2-2t+2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}\left(\frac{t^2}{t^2-2t+2}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$=\frac{\dfrac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}}{1-\dfrac{t^2}{t^2-2t+2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1-t)^3}{-2t+2}$$

$$=\frac{(1-t)^2}{4}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore (1-t)^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore (1-t)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore t=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\because 0<t<1)$$

※きちりやりすぎているのでもっといい方法がありそうです.