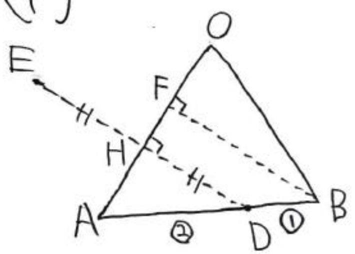
2021 北海道大(理系)

1

(1)



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB$

$6=\underbrace{|\vec{a}|}_{4}|\overrightarrow{OF}|$

$\therefore |\overrightarrow{OF}|=\frac{3}{2}$

$\overrightarrow{OF}=\frac{\frac{3}{2}}{4}\vec{a}=\underline{\frac{3}{8}\vec{a}}$ //

(2) EとDの中点をHとする.

$AH=\frac{2}{3}AF$

$=\frac{2}{3}\left(4-\frac{3}{2}\right)$

$=\frac{5}{3}$

$\therefore OH=4-\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$

$\overrightarrow{OH}=\frac{\frac{7}{3}}{4}\vec{a}=\frac{7}{12}\vec{a}$

$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OD})$

$\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OD}$

$=\frac{7}{6}\vec{a}-\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}$

$=\underline{\frac{5}{6}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}}$ //

(3) $BF=3k$ とおくと

$DH=2k,\ DE=4k$

$\triangle BDE=DE\times HF\times\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{9}=4k\times\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{3}\right)\times\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9}=2k\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{k}{3}$

$\therefore k=\frac{1}{3}\quad BF=1$

三平方の定理より

$|\vec{b}|^2=OF^2+BF^2$

$=\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$

$\therefore \underline{|\vec{b}|=\frac{\sqrt{13}}{2}}$ //

2

$y=\frac{1}{2}x^2$

$y=x$

(1)

$l_1: y=-(x+1)+\frac{1}{2}$

$=-x-\frac{1}{2}$

$l_2: y=(a+2)\{x-(a+2)\}+\frac{(a+2)^2}{2}$

$=(a+2)x-\frac{(a+2)^2}{2}$

↓

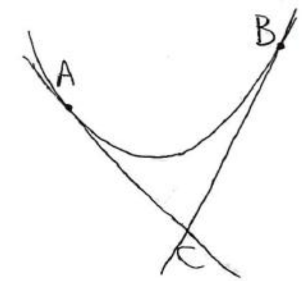
$-x-\frac{1}{2}=(a+2)x-\frac{(a+2)^2}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{(a+2)^2-1}{2}=\{(a+2)+1\}x$

$\Leftrightarrow x=\frac{(a+2)-1}{2}=\frac{a+1}{2}$

$\underline{C\left(\frac{a+1}{2},\ -\frac{a+2}{2}\right)}$ //

(2)



$|AB|$

$=\sqrt{(a+3)^2+\left\{\frac{(a+2)^2}{2}-\frac{1}{2}\right\}^2}$

$=\sqrt{(a+3)^2+\frac{(a^2+4a+3)^2}{4}}$

$=(a+3)\sqrt{1+\frac{(a+1)^2}{4}}$

$=\frac{a+3}{2}\sqrt{a^2+2a+5}$

$|BC|$

$=\sqrt{\left(a+2-\frac{a+1}{2}\right)^2+\left\{\frac{(a+2)^2}{2}+\frac{a+2}{2}\right\}^2}$

$=\sqrt{\frac{(a+3)^2}{4}+\frac{\{(a+2)(a+3)\}^2}{4}}$

$=\frac{a+3}{2}\sqrt{1+(a+2)^2}$

$=\frac{a+3}{2}\sqrt{a^2+4a+5}$

$\frac{|AB|}{|BC|}$

$=\sqrt{\frac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5}}$

$=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+4a+5}{a^2+2a+5}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2a}{a^2+2a+5}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{a+\frac{5}{a}+2}}}$ $a>0,\ \frac{5}{a}>0$ (相加平均) $\geqq$ (相乗平均)

$\geqq\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{5}+1}}}$

等号成立は $a=\frac{\sqrt{5}}{a}$ つまり $\underline{a=\sqrt{5}}$ のとき //

このとき最小をとる.

$\boxed{3}$

(1) ☆を6倍すると

$$9^{4x}+9\cdot 9^{y^2}=6\cdot 3^{4x+y^2}$$

$$\Leftrightarrow (3^{4x})^2-6\cdot 3^{4x}\cdot 3^{y^2}+9\cdot(3^{y^2})^2=0$$

$$\Leftrightarrow (3^{4x}-3\cdot 3^{y^2})^2=0$$

$$\therefore 3^{4x}=3^{y^2+1}$$

$$\therefore \underline{y^2=4x-1}\ /\!/$$

(2)

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$$

$$=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)+\log_4\left(1-\frac{x}{y}\right)$$

$$=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

ここで

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{4}(y^2+1)}{y}$$

$$=\frac{y+\frac{1}{y}}{4}$$

$$\leqq\frac{2}{4}\sqrt{y\cdot\frac{1}{y}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$y>0,\ \frac{1}{y}>0$
(相加平均)
≧(相乗平均)

これより

$$\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$\leqq\log_4\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\log_4 3-1$$

等号成立は $y=\frac{1}{y}$ つまり $y=1$, $x=\frac{1}{2}$ のとき. このときおめる

最大値 $\underline{\log_4 3-1}\ /\!/$

$\boxed{4}$ a_n, b_nは帰納的に整数である.

(1) $a_2=4+3=7$

$b_2=2+2=4$

$\therefore c_2=\underline{28}\ /\!/$

(2)

$$a_{n+1}b_{n+1}=(2a_n+3b_n)(a_n+2b_n)$$

$$\Leftrightarrow c_{n+1}=7c_n+2a_n^2+6b_n^2$$

c_nは偶数であることを示す.

(i) $n=1$のとき

$c_1=2$

(ii) $n=k$のとき c_nが偶数であるとすると $c_k=2m\ (m\in\mathbb{N})$ と表せる.

$n=k+1$のとき

$$c_{k+1}=7c_k+2(a_k^2+3b_k^2)$$

$$=2(7m+a_k^2+3b_k^2)$$

よりこのときも偶数.

(i)(ii)より c_nは偶数.

(3)

$$c_{n+2}$$

$$=7c_{n+1}+2a_{n+1}^2+6b_{n+1}^2$$

$$=7(7c_n+2a_n^2+6b_n^2)$$

$$+2(2a_n+3b_n)^2+6(a_n+2b_n)^2$$

$$=97c_n+28a_n^2+84b_n^2$$

c_{2l}が28の倍数であることを示す $(l\in\mathbb{N})$.

(i) $l=1$のとき

$c_2=28$

(ii) $l=k$のとき成立つとすると

$c_{2k}=28m\ (m\in\mathbb{N})$

と表せる.

$l=k+1$のとき

$$c_{2k+2}$$

$$=97c_{2k}+28a_{2k}^2+84b_{2k}^2$$

$$=28(97m+a_{2k}^2+3b_{2k}^2)$$

$l=k+1$も成立.

(i)(ii)より c_{2l}は28の倍数.

$\boxed{5}$

(1)

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta$$

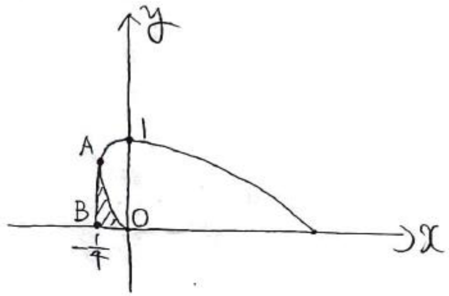
$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)$$

$$=-\sin\theta(1+2\cos\theta)$$

θ	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
x	2	↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
y	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0

$$\underline{a=-\frac{1}{4}}\ /\!/$$

(2)



求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} y\,dx$$

$$= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin\theta \frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

$$= -\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin^2\theta(1+2\cos\theta)\,d\theta$$

$$= -\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 2\sin^2\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$= -\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

$$+ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}$$

//