2020 東京医科（医）

第1問

(1)

$301\sqrt{a}-319\sqrt{b}$

$=a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{a}\,b-b\sqrt{b}$

$=(a+3b)\sqrt{a}-(3a+b)\sqrt{b}$

$\downarrow$

$\begin{cases} a+3b=301 \\ 3a+b=319 \end{cases}$

$\downarrow$

$4a+4b=620 \iff a+b=155$

$\therefore\ a=\underline{82}$ //

(2)

$\left(6\cos\alpha\sqrt{\cos\beta}+\sin\alpha\sqrt{15\sin\beta}\right)^2$

$=\left\{\sqrt{36\cos\beta+15\sin\beta}\left(\cos\alpha\cdot\underbrace{\frac{6\sqrt{\cos\beta}}{\sqrt{36\cos\beta+15\sin\beta}}}_{\cos\varphi}+\sin\alpha\underbrace{\frac{\sqrt{15\sin\beta}}{\sqrt{\quad\vdots\quad}}}_{\sin\varphi}\right)\right\}^2$

$=(36\cos\beta+15\sin\beta)\cos^2(\alpha-\varphi)$

$=39\left(\cos\beta\times\underbrace{\frac{12}{13}}_{\cos u}+\sin\beta\times\underbrace{\frac{5}{13}}_{\sin u}\right)\cos^2(\alpha-\varphi)$

$=39\cos(\beta-u)\cos^2(\alpha-\varphi)$

$0<u<\frac{\pi}{2}$ より $\beta=u$ となる

β がとれる．$0\leqq\alpha<2\pi$ より

$\alpha-\varphi=1$ なる α がとれる．

求める最大値は $\underline{39}$ //

(3)

$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<\frac{1}{48}$

$\iff 1<\frac{1}{48}\left\{(m+1)^{\frac{2}{3}}+(m+1)^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{2}{3}}\right\}$

$\iff (m+1)^{\frac{2}{3}}+(m+1)^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{2}{3}}>48$

$\therefore\ m^{\frac{2}{3}}\geqq 16$

$\therefore\ m\geqq 64$

$\min m=\underline{64}$ //

※ 平均値の定理でもOK

(4)

平均値の定理より $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$ として

$\begin{cases} \dfrac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}=f'(c) \\ n<c<n+1 \end{cases}$

なる c が存在．

$(n+1)^{\frac{4}{3}}-n^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}c^{\frac{1}{3}}$

$\frac{4}{3}n^{\frac{1}{3}}<(n+1)^{\frac{4}{3}}-n^{\frac{4}{3}}<\frac{4}{3}(n+1)^{\frac{1}{3}}$

つまり $\frac{4}{3}n^{\frac{1}{3}}\geqq 40$

$\iff n^{\frac{1}{3}}\geqq 30$

$\therefore\ n\geqq 30^3$　$\min n=\underline{27000}$ //

第2問

(1) $x^4+y^2=25$

$\downarrow$ x で微分

$4x^3+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\downarrow$ $(2,3)$ 代入

$32+6\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\y=3}}=0$

$\therefore\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\y=3}}=-\frac{16}{3}$

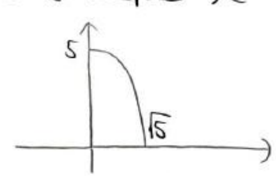
接線は

$y=-\frac{16}{3}(x-2)+3$

$=-\frac{16}{3}x+\underline{\frac{41}{3}}$ //

(2) $y^2=25-x^4$

$\iff y=\pm\sqrt{25-x^4}$



V

$=\int_0^{\sqrt{5}}y^2\pi\,dx$

$=\pi\int_0^{\sqrt{5}}(25-x^4)\,dx$

$=\pi\left[25x-\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{5}}$

$=\underline{20\sqrt{5}\pi}$ //

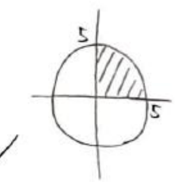
(3)

W

$=\int_0^5 x^2\pi\,dy$

$=\pi\int_0^5\sqrt{25-y^2}\,dy$

$=\pi\cdot 25\pi\cdot\frac{1}{4}$



$=\underline{\frac{25}{4}\pi^2}$ //

第3問

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

$F'(x)=f(x)$

$F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{9+\frac{19}{9}}$

$=\sqrt{\frac{100}{9}}$

$=\underline{\frac{10}{3}}$ //

$S(x)=\int_0^x f(x+t)\,dt$

$=\Big[F(x+t)\Big]_0^x$

$=F(2x)-F(x)$

$S'(x)=2f(2x)-f(x)$

$S'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot 3-\frac{10}{3}=\frac{8}{3}$

$y=S(x)$の逆関数は

$x=S(y)$

両辺xで微分すると

$1=S'(y)\frac{dy}{dx}$

$=S'(y)g'(x)\cdots ①$

$\Big\downarrow$ $S(0)=0$より $x=y=0$を代入

$g'(0)=\frac{1}{2f(0)-f(0)}=\frac{1}{3}$

①を両辺xで微分すると

$0=S''(y)\{g'(x)\}^2$

$+S'(y)g''(x)\cdots ②$

ここで

$S''(x)$

$=4f'(2x)-f'(x)$

$f'(x)$

$=\frac{1}{2}\left(9+\frac{19}{9}\sin x\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{19}{9}\cos x$

改めて②は

$0=\{4f'(2y)-f'(y)\}\{g'(x)\}^2$

$+S'(y)g''(x)$

$\Big\downarrow$ $x=y=0$を代入

$0=3\underbrace{f'(0)}_{\frac{1}{6}\cdot\frac{19}{9}}\times\frac{1}{9}+3g''(0)$

$=\frac{19}{162}+3g''(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=g''(0)$

$=\frac{-19}{486}$

第4問

(1) $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{15}{64}$

$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$=\frac{15}{64}\cdot\frac{8}{5}$

$=\frac{3}{8}$

(2)

$P(B\cap C)=P(B)\cdot P_B(C)$

$=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{12}$

$=\frac{1}{32}$

$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$

$=\frac{3}{8}+\frac{5}{16}-\frac{1}{32}$

$=\frac{12+10-1}{32}$

$=\frac{21}{32}$

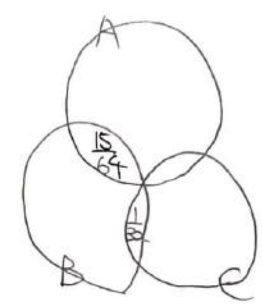
$P_{\overline{C}}(B)=\frac{P(B\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}$

$=\frac{P(B)-P(B\cap C)}{1-P(C)}$

$=\frac{\frac{3}{8}-\frac{1}{32}}{\frac{11}{16}}$

$=\frac{1}{2}$

(3)



$P(A\cup C)$

$=1-\underbrace{P(B)}_{\frac{3}{8}}+\frac{15}{64}+\frac{1}{32}$

$=\frac{64-24+15+2}{64}$

$=\frac{57}{64}$

$P(A\cap C)$

$=P(A)+P(C)-P(A\cup C)$

$=\frac{5}{8}+\frac{5}{16}-\frac{57}{64}=\frac{3}{64}$

$P_C(A\cup B)$

$=\frac{\frac{1}{32}+\frac{3}{64}}{\frac{5}{16}}$

$=\frac{2+3}{20}$

$=\frac{1}{4}$