2020 聖マリアンナ医科大

1

(1)

$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$

より (約数の個数) $= 3 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{12}$ //

(総和)

$= (1+2+2^2)(1+5)(1+101)$

$= \underline{4284}$ //

(2)

平面ABC : $x+y+z=1$ …①

直線OP : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$

$E(1+e, 1+e, 1+e)$ とおく.

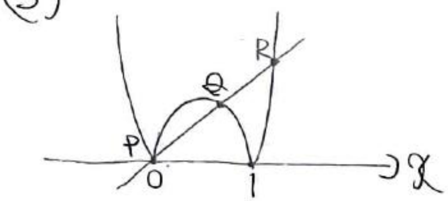
①に代入

$3+3t=1 \quad \therefore t = -\frac{2}{3}$

$\therefore E\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\therefore OE : ED = \underline{1:2}$ //

(3)



$-2x^2+2x = 2ax$

$\Leftrightarrow x\{x+(a-1)\}=0$

$\Leftrightarrow x = 0, 1-a$

$2x^2-2x = 2ax$

$\Leftrightarrow x = 0, 1+a$

P, Q, Rのx座標は $\underline{0, 1-a, 1+a}$ //

$\int_0^{1-a} (-2x^2+2x-2ax)\,dx$

$= -2\left\{-\frac{1}{6}(1-a)^3\right\}$

$= \frac{1}{3}(1-a)^3$

$\int_{1-a}^{1} \{2ax-(-2x^2+2x)\}\,dx$

$+ \int_1^{1+a} \{2ax-(2x^2-2x)\}\,dx$

$= \left[ax^2\right]_{1-a}^{1+a} + \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2\right]_{1-a}^{1}$

$+ \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_1^{1+a}$

$= \cdots = 2a^2$

$\frac{1}{3}(1-a)^3 = 2a^2$

$\Leftrightarrow a^3+3a^2+3a-1=0$

$\Leftrightarrow (a+1)^3 = 2$

$\therefore \underline{a = 2^{\frac{1}{3}} - 1}$ //

2

(1) $\underline{z_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right)}$ //

$\frac{1}{z_1} = \overline{z_1} \quad (\because |z_1|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = 1)$

$= \cos\frac{2}{5}\pi - i\sin\frac{2}{5}\pi$

$\therefore z_1 + \frac{1}{z_1} = \underline{2\cos\frac{2}{5}\pi}$ //

(2)

$z_2 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$

より $\underline{②, ③, ④が正しい}$ //

$z_1^5 = 1$

$\Leftrightarrow (z_1-1)(z_1^4+z_1^3+z_1^2+z_1+1)=0$

$\Leftrightarrow z_1^4+z_1^3+z_1^2+z_1+1=0$

$\Leftrightarrow z_1^2+z_1+1+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_1^2}=0$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_1-1=0$

$\therefore \underline{x^2+x-1=0 \text{ の解が } x_1}$

$\underline{⑤}$ //

$z_2^5 = -1$

$\Leftrightarrow 1-(-z_2)^5 = 0$

$\Leftrightarrow (1+z_2)(1-z_2+z_2^2-z_2^3+z_2^4)=0$

$\Leftrightarrow z_2^4-z_2^3+z_2^2-z_2+1=0$

$\Leftrightarrow z_2^2-z_2+1-\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_2^2}=0$

$\Leftrightarrow x_2^2-1-x_2=0$

$\therefore \underline{x^2-x-1=0 \text{ の解が } x_2}$

$\underline{③}$ //

S

$\times 10$

$= 10 \times \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{5}$

$= 5\sin\frac{\pi}{5}$

$= 5\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}$

$= 5\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}$

$= \underline{\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ //

$\Leftrightarrow \sqrt{5} = 5 - \frac{8}{25}S^2$

$2.2 < 5 - \frac{8}{25}S^2 < 2.3$

$\Leftrightarrow -2.8 < -\frac{8}{25}S^2 < -2.7$

$\Leftrightarrow \dfrac{25\times 2.7}{8} < S^2 < \dfrac{25\times 2.8}{8}$

$\Leftrightarrow 8.4375 < S^2 < 8.75$

Sの範囲は $2.9 < S < 3.0$

$\cdots$ ④

$\boxed{3}$

(1) $a=1$のとき

$a_{n+1}=1$

$a_4 = \underline{1}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{1}$

$a=2$のとき

$a_{n+1} = 2^{a_n}$

$a_2 = 4$, $a_3 = 16$

$a_4 = 2^{16} = \underline{65536}$

(2)

$P_1(a_n, \underline{a_n}) \cdots$ ③

$P_2(a_n, \underline{a_{n+1}}) \cdots$ ④

$P_3(a_{n+1}, \underline{a_{n+1}}) \cdots$ ④

$P_4(a_{n+1}, \underline{a_{n+2}}) \cdots$ ⑤

(3)

$f(x) = a^x$

$f'(x) = (\log a)a^x$

$x=\alpha$で接するとすると

$$\begin{cases} (\log a)a^{\alpha} = 1 \\ a^{\alpha} = \alpha \Leftrightarrow \alpha\log a = \log\alpha \end{cases}$$

また

$\alpha\log a = 1$

より

$\log\alpha = 1 \quad \therefore \alpha = e$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{e}$

$\boxed{4}$

(1)

$$\begin{array}{r} 288 \\ 7\overline{)2020} \\ \underline{14} \\ 62 \\ \underline{56} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 4 \end{array}$$

$\overline{2020} = \underline{4}$

$-100 \equiv -2$

$\equiv 5 \pmod 7$

$\overline{-100} = \underline{5}$

(2)

(a) 2 (b) 4 (c) 2

⑦

(3)

$a = pk + \overline{a}$, $b = pl + \overline{b}$

$\overline{a}\cdot\overline{b} = pm + \overline{\overline{a}\cdot\overline{b}}$ とおける.

ab

$= (pk+\overline{a})(pl+\overline{b})$

$= p(pkl + k\overline{b} + l\overline{a}) + \overline{a}\cdot\overline{b}$

$= p(pkl + k\overline{b} + l\overline{a} + m) + \overline{\overline{a}\cdot\overline{b}}$

これより

$\overline{ab} = \overline{\overline{a}\cdot\overline{b}}$

(4)

aとpは互いに素より

$ax + py = 1$

なる整数x, yが存在.

$ax = p(-y) + 1$

ここで$x=b$とすると $\overline{ab} = 1$

となる.

(5) 以下7を法とする合同式とする.

(i) $a \equiv 1$のとき

$a^6 - 1 \equiv 1^6 - 1 \equiv 0$

(ii) $a \equiv 2$のとき

$a^6 - 1 \equiv 2^6 - 1 \equiv 63 \equiv 0$

(iii) $a \equiv 3$のとき

$a^6 - 1 \equiv 3^6 - 1 \equiv 728 \equiv 0$

(iv) $a \equiv 4 \equiv -3$のとき

$a^6 - 1 \equiv (-3)^6 - 1 \equiv 728 \equiv 0$

(v) $a \equiv 5 \equiv -2$のとき

$a^6 - 1 \equiv (-2)^6 - 1 \equiv 63 \equiv 0$

(vi) $a \equiv 6 \equiv -1$のとき

$a^6 - 1 \equiv (-1)^6 - 1 \equiv 0$

これより $a^6 - 1$ は7の倍数.