2020 杏林大(医)

I

$a_2=20_{(9)}$
$a_3=200_{(9)}$

(a) $a_n=2\cdot 9^{n-1}$

↓

$a_n=\underbrace{200\cdots0_{(9)}}_{m=n-1\text{桁}}$ $\underline{A=2,\ B=0}$ $m=n-1$桁 … $\underline{①}$

$a_n=2\cdot 3^{2n-2}$

↓

$a_n=\underbrace{200\cdots0_{(3)}}_{l=2n-2\text{桁}}$ $\underline{C=2,\ D=0}$ $l=2n-2$桁 … $\underline{④}$

$a_1=2_{(3)}$
$a_2=200_{(3)}$
$a_3=20000_{(3)}$
⋮
$a_n=20000\cdots00_{(3)}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=20202\cdots02_{(3)}$

$\underline{E=2,\ F=0,}$

$2n-1$桁 … $\underline{⑤}$ で表される.

(b) $\underline{b_1=7}$

$b_3=0.013_{(4)}$
$=\frac{1}{16}+\frac{3}{64}$
$=\frac{7}{64}$

これより b_n の公比は $\underline{\frac{1}{8}}$.

$b_2=\frac{7}{8}$
$=3\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{16}$
$=\underline{0.32_{(4)}}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}b_k$
$=\dfrac{7-7\left(\frac{1}{8}\right)^5}{1-\frac{1}{8}}$
$=\dfrac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^5}{\frac{1}{8}}$
$=8-\left(\frac{1}{8}\right)^4$
$=8-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$
$=1000-0.\underbrace{00\cdots01}_{12\text{ケタ}}{}_{(2)}$
$=111.\underbrace{11\cdots1}_{12\text{ケタ}}{}_{(2)}$

II.

(a)

$\cos\angle AOB$
$=\dfrac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OA}||\vec{OB}|}$
$=\dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$
$=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}=\underline{\dfrac{1}{10}\sqrt{2}}$

$\triangle OAB$
$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{OA}|^2|\vec{OB}|^2-(\vec{OA}\cdot\vec{OB})^2}$
$=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot10-1}=\underline{\frac{7}{2}}$

平面AOB: $z=ax+by$ とおく
A, B通るので
$1=2a,\ 1=3b$
$\therefore z=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$
$\therefore 3x+2y-6z=0$

これと $C(0,0,1)$ との距離は
$\dfrac{|-6|}{\sqrt{9+4+36}}=\underline{\dfrac{6}{7}}$

$\boxed{\text{点と平面の距離公式}}$

(b) $\vec{CE}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\underline{CE=\sqrt{14}}$

直線CE: $\begin{cases}x=2t\\y=3t\\z=1-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

平面AOBと連立すると
$6t+6t-6(1-t)=0$
$\therefore t=\frac{1}{3}$
$\therefore \vec{CP}=\frac{1}{3}\vec{CE}$
$\therefore \underline{CP=\frac{1}{3}\sqrt{14}}$

Pは $\left(\frac{2}{3},1,\frac{2}{3}\right)$ より△AOBの重心 … $\underline{③}$

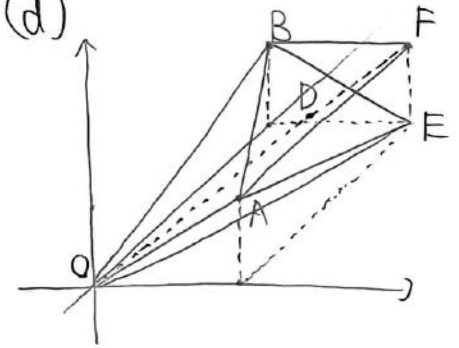
(c) $\vec{MF}=\begin{pmatrix}2\\3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $MF=\sqrt{4+9+\frac{1}{4}}$
$=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{53}}$

直線MF: $\begin{cases}x=2u\\y=3u\\z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}u\end{cases}$ $(u\in\mathbb{R})$

平面AOBと連立すると
$6u+6u-(3+3u)=0$
$\therefore u=\frac{1}{3}$
$\therefore \vec{MQ}=\frac{1}{3}\vec{MF}$ $\underline{MQ=\frac{1}{3}MF}$

Qは $\left(\frac{2}{3},1,\frac{2}{3}\right)$ より△AOBの重心 … $\underline{③}$

(d)



$S \cap T$ は 4面体OABD.

$S \cup T$ は

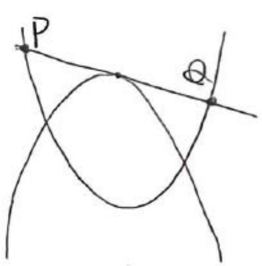
$\triangle OAB$　$\triangle FDB$
$\triangle OAE$　$\triangle FDA$
$\triangle OBE$　四角形EADB
$\triangle ABF$

の 7面体

III

(a)

$l: y=(-4t-8)(x-t)-2t^2-8t+7$
$=(-4t-8)x+2t^2+7$



P, Qでの接線はそれぞれ

$y=4\alpha(x-\alpha)+2\alpha^2-7$
$=4\alpha x-2\alpha^2-7$

$y=4\beta x-2\beta^2-7$

連立すると $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$y=2\alpha^2+2\alpha\beta-2\alpha^2-7=2\alpha\beta-7$

$\therefore R\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, 2\alpha\beta-7\right)$　カ… ③　ケ… ⑤

(b)

$\triangle PQR=S_1$ $\boxed{\frac{1}{6}\text{公式}}$ $\boxed{\frac{1}{12}\text{公式}}$

$=\frac{2}{6}(\beta-\alpha)^3+\frac{2}{12}(\beta-\alpha)^3$

lとCを連立すると

$2x^2-7=(-4t-8)x+2t^2+7$

$\Leftrightarrow 2x^2+(4t+8)x-2t^2-14=0$

$\Leftrightarrow x^2+(2t+4)x-t^2-7=0$

$\alpha+\beta=-2t-4$

$\alpha\beta=-t^2-7$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=4t^2+16t+16+4t^2+28$
$=8t^2+16t+44$

$\therefore \beta-\alpha=2\sqrt{2t^2+4t+11}$

S_1
$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$
$=4\left(\sqrt{2t^2+4t+11}\right)^3$
$=4\left(\sqrt{2(t+1)^2+9}\right)^3$

$t=-1$ のとき 最小値 108 をとる.

(c)

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3}{\frac{2}{6}(\beta-\alpha)^3}=\frac{3}{2}$

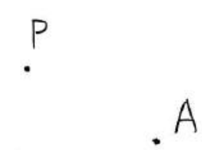
$\frac{1}{6}$公式, $\frac{1}{12}$公式 (2次関数) を知って(ない)と大変です.

IV

(a) $P(4\cos t, 4\sin t)$

A, Pの中点 $(2\cos t, 3+2\sin t)$

(b)



$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}4\cos t\\4\sin t-6\end{pmatrix}$

線分APの垂直二等分線は法線ベクトルが$\overrightarrow{AP}$で, A, Pの中点を通るので

$4\cos t(x-2\cos t)+(4\sin t-6)(y-3-2\sin t)$
$=0$

$\Leftrightarrow (4\cos t)x-8\cos^2 t$
$+(4\sin t-6)y-12\sin t-8\sin^2 t+18+12\sin t=0$

$\Leftrightarrow (4\cos t)x+(4\sin t-6)y+10=0$

$\therefore \left(\frac{3}{2}-\sin t\right)y=x\cos t+\frac{5}{2}$

(c)

$\cos t=u$, $\sin t=v$ とおくと

$$\begin{cases} u^2+v^2=1 \\ ux+\left(v-\frac{3}{2}\right)y+\frac{5}{2}=0 \end{cases}$$

が交わるようなx, yの条件を求めればいい. $xu+yv-\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}=0$ として

$\frac{\left|0+0-\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqq 1$

分母はらって2乗すると

$\frac{9}{4}y^2-\frac{15}{2}y+\frac{25}{4}\leqq x^2+y^2$

$\Leftrightarrow -x^2+\frac{5}{4}y^2-\frac{15}{2}y\leqq-\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow -x^2+\frac{5}{4}(y^2-6y)\leqq-\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow -x^2+\frac{5}{4}(y-3)^2\leqq\frac{45}{4}-\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}x^2+\frac{(y-3)^2}{4}\leqq 1$　ソ… ⑤

双曲線が境界で焦点を含まない　タ… ⑥

焦点 $(0, \pm 3+3)$

つまり 原点と $(0, 6)$