2020 国際医療福祉大(医)

第1問

(A)

正弦定理

$\frac{4}{\sin\angle BAC}=2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \sin\angle BAC=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ //

$\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$ //

CA$=x$とおく. 余弦定理より

$4^2=6+x^2-2\sqrt{6}x\cdot\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 0=3x^2-2\sqrt{6}x-30$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{96}}{3}$

$\therefore CA=\frac{5\sqrt{6}}{3}$ //

(B)

${}_8C_3=56$コ //

対角線は

$8\times5\div2=20$本 //

Tの内部にある対角線の個数は8つの頂点から4つ選んでできる四角形の対角線の交点の個数なので

${}_8C_4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$コ //

(C)

$(x-2y)^2=34-2y\geqq0$

$\therefore y\leqq17$

$((x-2y)^2, y)=(4,15),(16,9),(0,17)$

$\downarrow$

$(x-30)^2=4,\ (x-16)^2=16,\ (x-34)^2=0$

$x-30=\pm2,\ x-16=\pm4,\ x-34=0$

合計で5組, xが最大なのは

$(x,y)=(34,17)$ //

(D)

$P(x)=(x-2)Q_1(x)+9$

$P(x)=(x+2)^2Q_2(x)+20x+17$

とおく

$P(x)=(x-2)\{(x+2)Q_3(x)+a\}+9$

$=(x-2)(x+2)Q_3(x)+a(x-2)+9$

$P(-2)=-4a+9=-23$

$\therefore a=8$

$(x-2)(x+2)$で割った余りは

$8(x-2)+9=8x-7$ //

また

$P(x)=(x+2)^2\{(x-2)Q_4(x)+b\}+20x+17$

$=(x+2)^2(x-2)Q_4(x)+b(x+2)^2+20x+17$

$P(2)=16b+57=9\quad\therefore b=-3$

$(x+2)^2(x-2)$で割った余りは

$-3(x+2)^2+20x+17$

$=-3x^2+8x+5$ //

第2問

(1)

					項数	累計項数
1				$\frac{1}{1}$	1	1
2	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$	2	3
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$	3	6
			⋮			
$n-1$					$n-1$	$\frac{1}{2}(n-1)n$
n	$\frac{1}{3^{n-1}}$			$\frac{1}{3^{n-1}}$	n	$\frac{1}{2}n(n+1)$

$\frac{1}{729}=\frac{1}{3^6}$は第7群にある.

第7群の最初は

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot7+1=22$番目

初めて$\frac{1}{729}$が現れるのは第22項 //

初めて$\frac{1}{3^{m-1}}$が現れるのは

$\frac{1}{2}(m-1)m+1=\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}m+1$ //

(2) 第500項が第n群にあるとすると

$\frac{1}{2}(n-1)n<500\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$

$\Leftrightarrow (n-1)n<1000\leqq n(n+1)$

$\therefore n=32$

第31群のラストが$\frac{1}{2}\cdot31\cdot32=496$項なので, 第500項は$\frac{1}{3^{31}}$で //

第32群の4番目 //

(3)

$S_n=\sum_{k=1}^{n}$(k群の総和)

$=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{3^{k-1}}$

$S_n=a+\frac{bn+c}{3^{n-1}}$とおくと

$S_1 = a+b+c = 1$

$S_2 = a + \frac{2b+c}{3} = \frac{5}{3}$

$S_3 = a + \frac{3b+c}{9} = 2$

$\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c = -\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}b + \frac{8}{9}c = -1$

$\downarrow$

$\frac{4}{9}c = -\frac{1}{3}$ $\therefore c = -\frac{3}{4}$

$b = -2c - 2 = -\frac{1}{2}$

$a = \frac{9}{4}$

あまり速く解けませんでした…

$\therefore S_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^{n-1}}$

$a_1 + \cdots + a_{500}$

$= S_{81} + \frac{1}{3^{31}} \times 4$

$= \frac{9}{4} - \frac{65}{4 \cdot 3^{30}} + \frac{4}{3^{31}}$

$= \frac{9}{4} + \frac{-195+16}{4 \cdot 3^{31}}$

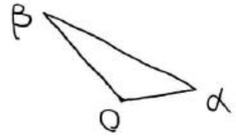
$= \frac{9}{4} - \frac{179}{4 \cdot 3^{31}}$

第3問

(1) $\frac{\beta}{\alpha} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = 2$, $\arg\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{3}\pi$

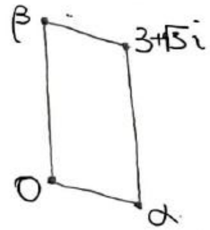
$\beta = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\alpha$



$\triangle OAB = \frac{1}{2}|\alpha| \cdot 2|\alpha| \sin\frac{2}{3}\pi$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2$

(2)



$\alpha + \beta = 3 + \sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow \alpha + (-1+\sqrt{3}i)\alpha = 3+\sqrt{3}i$

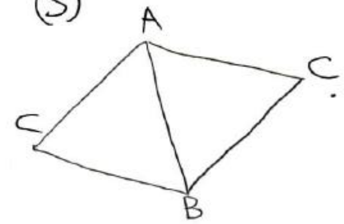
$\Leftrightarrow \alpha i = \sqrt{3} + i$

$\therefore \alpha = 1 - \sqrt{3}i$

(平行四辺形OACB)

$= \sqrt{3}|\alpha|^2 = 4\sqrt{3}$

(3)



$3+\sqrt{3}i - \alpha = (\beta - \alpha)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$= (-2+\sqrt{3}i)\alpha\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$6+2\sqrt{3}i - 2\alpha = (-2+\sqrt{3}i)\alpha\underbrace{(1\pm\sqrt{3}i)}_{☆}$

☆が $1+\sqrt{3}i$ のとき

$6+2\sqrt{3}i - 2\alpha = (-2+\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i - 3)\alpha$

$\Leftrightarrow 6+2\sqrt{3}i = (-3-\sqrt{3}i)\alpha$

$\therefore \alpha = -2$

このとき $AB = |5+\sqrt{3}i| = 2\sqrt{7}$

☆が $1-\sqrt{3}i$ のとき

$6+2\sqrt{3}i - 2\alpha = (-2+\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i + 3)\alpha$

$\Leftrightarrow 6+2\sqrt{3}i = (3+3\sqrt{3}i)\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{(6+2\sqrt{3}i)(3-3\sqrt{3}i)}{36}$

$= \frac{(3+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{6}$

$= \frac{6-2\sqrt{3}i}{6}$

$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i$

このとき

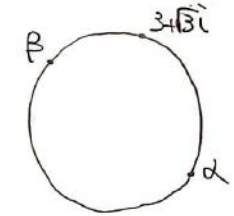
$AB = \left|2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}i\right|$

$= \sqrt{4 + \frac{16}{3}}$

$= \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{2\sqrt{21}}{3}$

(4)



$\alpha - (3+\sqrt{3}i)$

$= x - 3 - 2\sqrt{3}i$

$\beta - (3+\sqrt{3}i)$

$= (-1+\sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i) - 3 - \sqrt{3}i$

$= -x + (\sqrt{3} + \sqrt{3}x - \sqrt{3})i$

$= -x + \sqrt{3}xi$

ベクトルととらえるとこれらが垂直なので

$\begin{pmatrix} x-3 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ \sqrt{3}x \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 6x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$

$\therefore x = -3$

(Kの半径) $= \frac{1}{2}\sqrt{7} \cdot |\alpha| = \sqrt{21}$

第4問

(1)

$f(x)=x(\log x)^2$

$f'(x)=(\log x)^2+2x(\log x)\frac{1}{x}$

$=(\log x)(\log x+2)$

$x=e^{-2}$ で極大値 $4e^{-2}$

$x=1$ で極小値 0 をとる.

$f''(x)=\frac{1}{x}(\log x+2)+(\log x)\frac{1}{x}$

$=\frac{2}{x}(\log x+1)$

変曲点 (e^{-1}, e^{-1})

また $\lim_{x\to+0}\log x=-\infty \cdots ①$

$0<x<1$ で $0<x(\log x)^2\leqq 4e^{-2}$

より $\log x<0$ で割ると

$\frac{4e^{-2}}{\log x}\leqq x\log x<0$

$\lim_{x\to+0}\frac{4e^{-2}}{\log x}=0$ より

$\lim_{x\to+0}x\log x=0 \cdots ②$

$x=\sqrt{t}$ とおくと

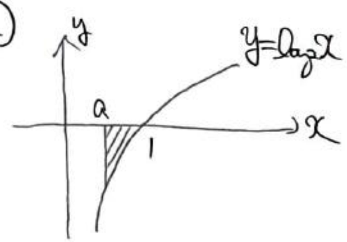
$\lim_{t\to+0}t(\log t)^2$

$=\lim_{x\to+0}x^2(\log x^2)^2$

$=\lim_{x\to+0}4x^2(\log x)^2$

$=\lim_{x\to+0}4(x\log x)^2=0 \cdots ②$

(2)



$S(a)$

$=\int_a^1(0-\log_2 x)dx$

$=-\int_a^1\frac{\log x}{\log 2}dx$

$=-\frac{1}{\log 2}[x\log x-x]_a^1$

$=-\frac{1}{\log 2}(-a\log a+a-1)$

$=\frac{1}{\log 2}(a\log a-a+1)$.

$S(\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{\log 2}(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$

$=\frac{-\log 2+1}{2\log 2}=\frac{1}{\log 4}-\frac{1}{2}$

$\lim_{a\to+0}S(a)=\frac{1}{\log 2}(0-0+1)$

$=\frac{1}{\log 2}$.

$V(a)$

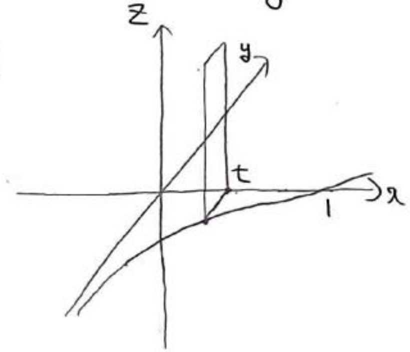
$=\int_a^1\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^2\pi dx$

$=\frac{\pi}{(\log 2)^2}\left[x(\log x)^2-2x\log x+2x\right]_a^1$

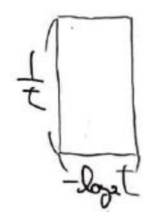
$=\frac{\pi}{(\log 2)^2}\left(2-a(\log a)^2+2a\log a-2a\right)$

$\therefore \lim_{a\to+0}V(a)=\frac{2\pi}{(\log 2)^2}$

(3)



$x=t$ で切ると断面は



の長方形. $t=\frac{1}{4}$ のとき辺の長さは 2 と 4

(Kの体積)

$=\int_{\frac{1}{16}}^1\frac{1}{t}(-\log_2 t)dt$

$=-\int_{\frac{1}{16}}^1\frac{1}{t}\cdot\frac{\log t}{\log 2}dt$

$=-\frac{1}{\log 2}\left[(\log t)^2\times\frac{1}{2}\right]_{\frac{1}{16}}^1$

$=-\frac{1}{\log 2}\left\{-(\log\frac{1}{16})^2\frac{1}{2}\right\}$

$=\frac{1}{2\log 2}(\log 2^{-4})^2$

$=\frac{1}{2\log 2}16\cdot(\log 2)^2$

$=8\log 2$

$=\log 2^8$

$=\log 256$