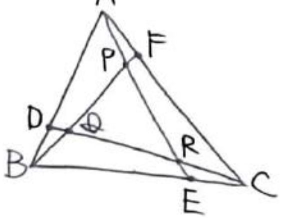
2020 順天堂大(医)

Ⅰ

(1)



$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$

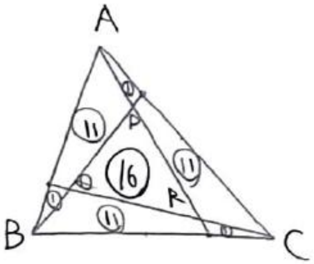
メネラウスの定理より $AP:PE=4:9$

$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{13}\overrightarrow{AE}$

$=\frac{1}{13}\vec{b}+\frac{3}{13}\vec{c}$

メネラウスの定理より $AR:RE=12:1$

$\therefore AP:PR:RE=4:8:1$



$\triangle PQR=\frac{16}{52}\triangle ABC$

$=\frac{4}{13}\triangle ABC$

$\triangle ABC$と$\triangle PQR$の重心は一致.

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

(2)

$\triangle ADE$で余, $DE=EA=x$とおく.

$x^2=x^2+\frac{16}{9}-2\cdot x\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}$

$\Leftrightarrow 0=16-3\sqrt{14}x$

$\therefore x=\frac{16}{3\sqrt{14}}=\frac{8\sqrt{14}}{21}$

$\triangle ABC$の面積は

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\sin\angle BAC=\frac{5\sqrt{7}}{12}$

$\therefore \sin\angle BAC=\frac{5\sqrt{7}}{16}$

$\triangle ABC$で余

$BC^2=\frac{16}{9}+4-2\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\cos\angle BAC$

$=\frac{52}{9}-\frac{16}{3}\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{7}}{16}\right)^2}$

$=\frac{52}{9}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{16^2-175}{81}}$

$=\frac{25}{9}$

$\therefore BC=\frac{5}{3}$

$EA=EC=EF$より

Pは$\triangle ABC$の外心である.

($\because \triangle APE\equiv\triangle BPE\equiv\triangle CPE$)

$\triangle ABC$で正

$\frac{BC}{\sin A}=2AP$

$\therefore AP=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5\sqrt{7}}{8}}=\frac{8}{3\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{21}$

$EA=\frac{8\sqrt{14}}{21}$, $AF=\frac{8\sqrt{7}}{21}$より

$\cos\angle EAP=\frac{1}{\sqrt{2}}$ つまり$\triangle EAP$は直角二等辺三角形.

$EP=AP=BP=CP=\frac{8\sqrt{7}}{21}$

が求める半径.

(3)

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}$

$=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\cos\theta\\2\sin\theta\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2\cos\theta-1\\2\sin\theta\end{pmatrix}$

$\therefore Q(2\cos\theta-1,\ 2\sin\theta)$

$\overrightarrow{OP}$

$=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$

$=\overrightarrow{OQ}+\begin{pmatrix}\cos(\pi+2\theta)\\\sin(\pi+2\theta)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2\cos\theta-\cos2\theta-1\\2\sin\theta-\sin2\theta\end{pmatrix}$

$P(2\cos\theta-\cos2\theta-1,\ 2\sin\theta-\sin2\theta)$

$x_P=2\cos\theta-2\cos^2\theta$

$=\cos\theta(2-2\cos\theta)$

$y_P=\sin\theta(2-2\cos\theta)$

$\therefore r(\theta)=2-2\cos\theta$

(面積)

$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(2-2\cos\theta)^2d\theta$

$=2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$

$=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)d\theta$

$=\int_0^{2\pi}(3-4\cos\theta+\cos2\theta)d\theta$

$=\left[3\theta-4\sin\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{2\pi}$

$=6\pi$

（曲線の長さ）

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4(1-\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2}\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - 8\cos\theta + 4}\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\underbrace{\cos 2\tfrac{\theta}{2}}_{1-2\sin^2\frac{\theta}{2}}}\, d\theta$

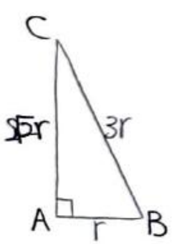
$= \int_0^{2\pi} \sqrt{16\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} 4\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$= \left[-8\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \underline{16}$ //

$\boxed{\text{II}}$

(1)



$3r \cdot t \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}r^2$

$\therefore t = \underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}r}$ //

（回転体）

$= r^2\pi \cdot 2\sqrt{2}r \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} r^3$

$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^3 t^3$

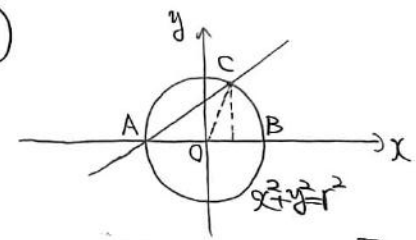
$= \underline{\frac{9}{8}\pi t^3}$ //

（回転体の表面積）

$= \frac{27\pi}{8} t^2 + \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 t^2 \pi$

$= \underline{\frac{9}{2}\pi t^2}$ //

(2)



$\angle OAC = \frac{\pi}{6}$ より $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$.

$C\left(\underline{\frac{1}{2}r}, \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}r}\right)$ //

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 \pi \times \frac{r}{2} \times \frac{1}{3}$

$+ \int_{\frac{r}{2}}^{r} (r^2 - x^2)\pi\, dx$

$= \frac{\pi}{8}r^3 + \pi\underbrace{\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{r}{2}}^{r}}_{\frac{2}{3}r^3 - \frac{11}{24}r^3}$

$= \frac{\pi}{8}r^3 + \frac{5}{24}r^3\pi$

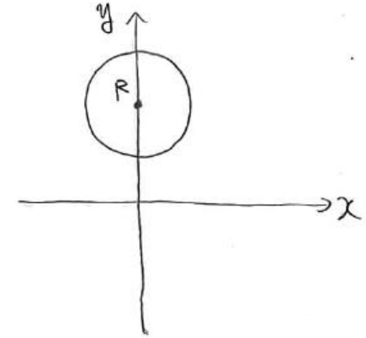
$= \underline{\frac{1}{3}\pi r^3}$ //

（これの表面積）

$= r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r\pi + \left(\frac{1}{3}\pi r^3\right)'$

$= \underline{\frac{2+\sqrt{3}}{2}\pi r^2}$ //

(3)



（トーラスの体積）

$= r^2\pi \times 2R\pi$ ＜ パップス・ギュルダンの定理

$= \underline{2\pi^2 r^2 R}$ //

（トーラスの表面積）

$= \frac{d}{dr}$（トーラスの体積）

$= \underline{4\pi^2 r R}$ //

$\boxed{\text{III}}$

(1) $n=3$を代入すると

$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$

$> \frac{x^3}{3!}$

$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2} > \frac{x}{6}$

$\therefore 0 < \frac{x^2}{e^x} < \frac{6}{x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} = 0$ より $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

(2)

接点のx座標をtとすると

接線は $y' = e^x + (1+x)e^x$ より

$y = (2+t)e^t(x-t) + (1+t)e^t$

$= (2+t)e^t x + (-t^2 - t + 1)e^t$

$\downarrow$ (0, a)を通る

$a = (-t^2 - t + 1)e^t \cdots ①$

右辺を$f(t)$とおく.

$f'(t) = (-2t-1)e^t$

$+ (-t^2 - t + 1)e^t$

$= (-t^2 - 3t)e^t$

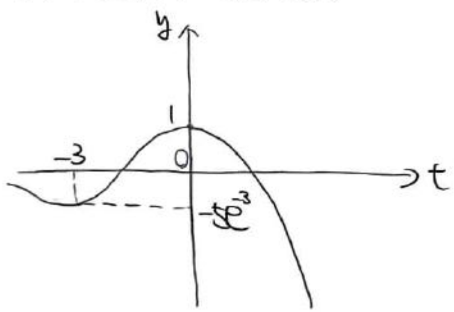
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, -3$

t	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-5e^{-3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = -\infty$$

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0 \quad (\because (1))$$

①は $y=a$ と $y=f(t)$ のグラフを書いて考える。



$a>1$ のとき　なし

$a=1$ または $a<-5e^{-3}$ のとき　1本

$0\leqq a<1$ または $a=-5e^{-3}$ のとき　2本

$-5e^{-3}<a<0$ のとき　3本

//