2020 東京医科歯科大 (医)

$\boxed{1}$

(1) $f(0)=0$　$f(1)=1$

$f(2)=2$　$f(3)=1$

$f(4)=0$　$f(5)=1$

$f(6)=0$　$f(7)=-1$

$f(8)=-2$

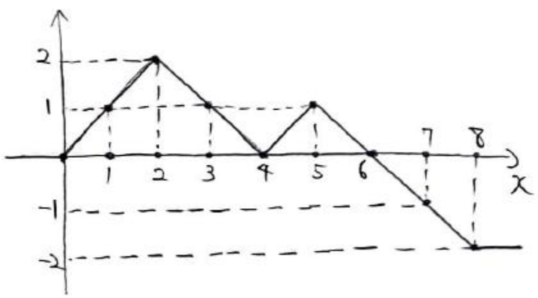
$n-1<x<n$ のとき

$f(x)=\{f(n)-f(n-1)\}(x-n)+f(n)$

とできるので $y=f(x)$ は $(n, f(n))$

と $(n-1, f(n-1))$ を結ぶ直線.

つまり $f(x)$ のグラフは



(2)

表裏の変化が k回起こる.

○○○○○ ･･･ ○○○

Nコのボールの間 N−1ヶ所から

kヶ所選んで仕切り‖を入れるのは

${}_{N-1}C_k$ 通り

○○○‖○‖･････○‖○ ○

↑

先頭が表か裏かで 2通り.

よって

$$P(k)=\frac{{}_{N-1}C_k\cdot 2}{2^N}=\underline{\frac{{}_{N-1}C_k}{2^{N-1}}}$$

(3)

(i) 表裏の変化が 2k回のとき

$${}_{N-1}C_{2k}\times \underset{\boxed{\text{先頭が表か裏か}}}{2}$$

(ii) 先頭が表で表裏の変化が 2k−1 回のとき

$${}_{N-1}C_{2k-1}$$

(iii) 先頭が裏で表裏の変化が 2k+1 回のとき

$${}_{N-1}C_{2k+1}$$

以上より

$$Q(k)=\frac{{}_{N-1}C_{2k}\times 2+{}_{N-1}C_{2k-1}+{}_{N-1}C_{2k+1}}{2^N}$$

$$=\frac{({}_{N-1}C_{2k-1}+{}_{N-1}C_{2k})+({}_{N-1}C_{2k}+{}_{N-1}C_{2k+1})}{2^N}$$

$$=\frac{{}_{N}C_{2k}+{}_{N}C_{2k+1}}{2^N}$$

$$=\underline{\frac{{}_{N+1}C_{2k+1}}{2^N}}$$

公式

${}_mC_r+{}_mC_{r+1}={}_{m+1}C_{r+1}$

を使いました.

(4)

$$\sum_{k=0}^{N} kQ(k)$$

$$=\frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{N} k\cdot {}_{N+1}C_{2k+1}$$

$$=\frac{1}{2^{N+1}}\sum_{k=0}^{N} 2k\cdot {}_{N+1}C_{2k+1}$$

$$=\frac{1}{2^{N+1}}\sum_{k=0}^{N}\{(2k+1){}_{N+1}C_{2k+1}-{}_{N+1}C_{2k+1}\}$$

$$(1+x)^{N+1}=\sum_{r=0}^{N+1} {}_{N+1}C_r x^r \cdots ①$$

↓ $x=1, -1$ を代入すると

$$2^{N+1}=\sum_{r=0}^{N+1} {}_{N+1}C_r$$

$$-)\quad 0=\sum_{r=0}^{N+1} {}_{N+1}C_r(-1)^r$$

$$2^{N+1}=2({}_{N+1}C_1+{}_{N+1}C_3+\cdots)$$

$$\Leftrightarrow 2^N=\sum_{k=0}^{N} {}_{N+1}C_{2k+1}$$

① を x で微分すると

$$(N+1)(1+x)^N=\sum_{r=0}^{N} r\cdot {}_{N+1}C_r\cdot x^{r-1}$$

↓ $x=1, -1$ を代入すると

$$(N+1)2^N=\sum_{r=0}^{N} r\cdot {}_{N+1}C_r$$

$$+)\quad 0=\sum_{r=0}^{N} r\,{}_{N+1}C_r(-1)^{r-1}$$

$$(N+1)2^N=2(1\cdot {}_{N+1}C_1+3\cdot {}_{N+1}C_3+\cdots)$$

$$\Leftrightarrow (N+1)2^{N-1}=\sum_{k=0}^{N}(2k+1){}_{N+1}C_{2k+1}$$

以上より

$$\sum_{k=0}^{N} kQ(k)$$

$$=\frac{1}{2^{N+1}}\left\{(N+1)2^{N-1}-2^{N}\right\}$$

$$=\frac{(N-1)2^{N-1}}{2^{N+1}}=\underline{\frac{N-1}{4}}$$

$\boxed{2}$

(1) $z=x+yi$ とおくと

C_0 は

$(m+i)(x+yi)+(m-i)(x-yi)+2a$

$=2mx-2y+2a=0$

$\therefore mx-y+a=0$

C_1 は

$(k_1+i)(x+yi)+(k_1-i)(x-yi)-2ak_1^2$

$=2k_1x-2y-2ak_1^2=0$

$\therefore k_1x-y-ak_1^2=0$

同様に C_2 は

$k_2x-y-ak_2^2=0$

すべて直線である.

(2) C_0-C_1 すると

$$-\sqrt{m^2+1}\,x+a(1+k_1^2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{a(1+m^2+m^2+1+2m\sqrt{m^2+1})}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\therefore x=a(2\sqrt{m^2+1}+2m)$$

$$=2ak_1$$

$P_1(X, Y)$ とすると

$$\begin{cases} X=2ak_1 \Leftrightarrow k_1=\dfrac{X}{2a} \\ k_1X-Y-ak_1^2=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{X^2}{2a}-Y-\frac{X^2}{4a}=0$$

$$\therefore Y=\frac{X^2}{4a}$$

ここで $X=2a(m+\sqrt{m^2+1})$ より

$$\lim_{m\to\infty} X=\infty$$

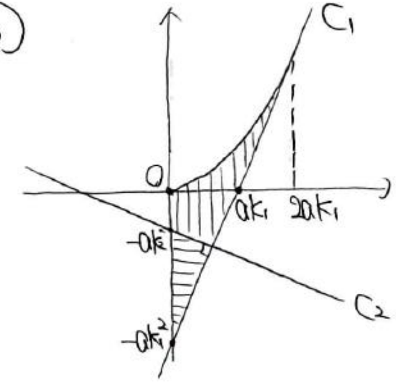
$$\lim_{m\to-\infty} X=\lim_{m\to-\infty} 2a\frac{1}{\sqrt{m^2+1}-m}$$

$$=0$$

以上より $X>0$

F_1 は $\underline{\text{放物線 } y=\frac{x^2}{4a}\ (x>0)}$

(3)



C_1 と C_2 の交点

$$(k_1-k_2)x-a(k_1^2-k_2^2)=0$$

$$\therefore x=a(k_1+k_2)=2am$$

T

$$=(-ak_2^2+ak_1^2)2am\cdot\frac{1}{2}$$

$$=a^2m(k_1+k_2)(k_1-k_2)$$

$$=a^2m\cdot 2m\cdot 2\sqrt{m^2+1}$$

$$=4a^2m^2\sqrt{m^2+1}$$

$S+T$

$$=\int_0^{2ak_1}\left\{\frac{x^2}{4a}-(k_1x-ak_1^2)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{4a}\int_0^{2ak_1}(x^2-4ak_1x+4a^2k_1^2)dx$$

$$=\frac{1}{4a}\int_0^{2ak_1}(x-2ak_1)^2dx$$

$$=\frac{1}{4a}\left[\frac{1}{3}(x-2ak_1)^3\right]_0^{2ak_1}$$

$$=\frac{2}{3}a^2k_1^3$$

$$\frac{T}{S}$$

$$=\frac{4a^2m^2\sqrt{m^2+1}}{\frac{2}{3}a^2k_1^3-4a^2m^2\sqrt{m^2+1}}$$

$$=\frac{4m^2\sqrt{m^2+1}}{\frac{2}{3}k_1^3-4m^2\sqrt{m^2+1}}$$

これは a によらず一定である.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T}{S}$$

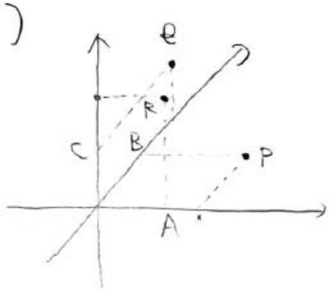
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{4\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}{\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\right)^3-4\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}$$

$$=\frac{4}{\frac{16}{3}-4}$$

$$=\underline{3}$$

3

(1)



平面PQRを

$z=ax+by+c$ とおくと

P, Q, R通るので

$$\begin{cases} 0=at+b+c \\ 1=bt+c \\ t=a+c \end{cases}$$

$-1=at+(1-t)b$

$1-t=-a+bt$

↓

$-1=(bt+t-1)t+(1-t)b$

$-t^2+t-1 = (t^2-t+1)b$

$\therefore b=-1$

$c=t+1$

$a=-1$

平面PQRは

$x+y+z-t-1=0$

Oから平面PQRにおろした垂線の足をHとすると

直線OH: $\begin{cases} x=u \\ y=u \\ z=u \end{cases}$

$H(h,h,h)$とおくと

$h+h+h-t-1=0$

$\therefore h=\frac{t+1}{3}$

$PQ=PR=QR=\sqrt{t^2+(1-t)^2+1}$

$=\sqrt{2t^2-2t+2}$

$\triangle PQR$は正三角形より

$\triangle PQR=\frac{1}{2}(2t^2-2t+2)\sin 60^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)$

(四面体OPQR)

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)\times\frac{\sqrt{3}(t+1)}{3}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{6}(t^2-t+1)(t+1)=\frac{1}{6}(t^3+1)$

$t=1$のとき

$\frac{1}{3}$ //

(2)

V_1

$=\frac{1}{6}(t^3+1)+\frac{t}{2}\times1\times\frac{1}{3}\times3$

$=\frac{1}{6}(t^3+3t+1)$ //

(3)

V_2

$=\frac{4\pi}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$

$\frac{V_1}{V_2}$

$=\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{t^3+3t+1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{(t^3+3t+1)^2}{(t^2+1)^3}}$

$f(t)=\frac{(t^3+3t+1)^2}{(t^2+1)^3}$ とおく

$f'(t)$

$=\frac{2(t^3+3t+1)(3t^2+3)(t^2+1)^3-(t^3+3t+1)^2 3(t^2+1)^2 2t}{(t^2+1)^6}$

$=\frac{6(t^3+3t+1)(t^2+1)^2\{(t^2+1)^2-t(t^3+3t+1)\}}{(t^2+1)^6}$

$=\frac{6(t^3+3t+1)(-t^2-t+1)}{(t^2+1)^4}$

$t>0$より

t	0	…	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	…
$f'(t)$		+	0	−
$f(t)$		↗		↘

$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき //

$f(t)$と$\frac{V_1}{V_2}$が最大をとる.