2020 北海道大（理系）

1

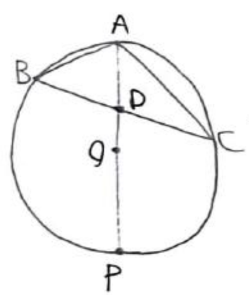
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする.

(1) $\underbrace{|\overrightarrow{BC}|^2}_{6}=|\vec{c}-\vec{b}|^2$

$=\underbrace{|\vec{c}|^2}_{4}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\underbrace{|\vec{b}|^2}_{1}$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\underline{-\frac{1}{2}}$ //

(2)



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}$

$=\vec{b}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})$

$=\vec{b}\cdot\{(s-1)\vec{b}+t\vec{c}\}$

$=s-1+t\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=s-\frac{1}{2}t-1=0$ ← 円周角の定理でAB⊥BP

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}$

$=\vec{c}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})$

$=\vec{c}\cdot\{s\vec{b}+(t-1)\vec{c}\}$

$=-\frac{1}{2}s+4t-4=0$

$\Leftrightarrow s-8t+8=0$

$$\begin{array}{r} s-8t+8=0 \\ -)\ s-\frac{1}{2}t-1=0 \\ \hline -\frac{15}{2}t+9=0 \end{array}$$

$\therefore \underline{t=\frac{6}{5}\quad s=\frac{8}{5}}$ //

(3)

$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}$

$=\frac{8k}{5}\vec{b}+\frac{6k}{5}\vec{c}$

$\frac{8k}{5}+\frac{6k}{5}=1\quad \therefore k=\frac{5}{14}$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$

$|\overrightarrow{AD}|^2$

$=\frac{1}{49}|4\vec{b}+3\vec{c}|^2$

$=\frac{1}{49}\left(16+36+24\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$=\frac{40}{49}$

$\therefore |\overrightarrow{AD}|=\underline{\frac{2\sqrt{10}}{7}}$ //

2

(1)

$$\begin{array}{r} \ell:\ 16x+9y=1 \\ -)\ 16\cdot4+9(-7)=1 \\ \hline 16(x-4)+9(y+7)=0 \end{array}$$

$\Leftrightarrow 16(x-4)=9(-y-7)$

$\begin{cases} x-4=9k \\ -y-7=16k \end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$

$\therefore$ 格子点 $\underline{(9k+4,\ -16k-7)}$ //

(2)

格子点と原点との距離は

$\sqrt{(9k+4)^2+(-16k-7)^2}$

$=\sqrt{81k^2+72k+16+256k^2+224k+49}$

$=\sqrt{337k^2+296k+65}$

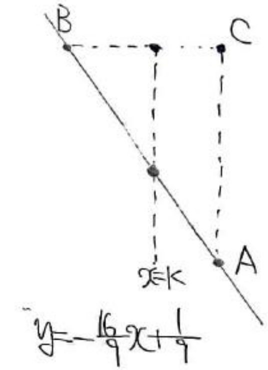
$=\sqrt{337\left(k^2+\frac{296}{337}k\right)+65}$

$=\sqrt{337\left(k+\frac{148}{337}\right)^2-\frac{148^2}{337}+65}$

$k=0$ のとき $A(4,-7)$

$k=-1$ のとき $B(-5,9)$

つまり $C(4,9)$



$x=k$ での格子点はガウス記号使うと

$\left[9-\left(-\frac{16}{9}k+\frac{1}{9}\right)\right]+1$

$=\left[\frac{80}{9}+\frac{16}{9}k\right]+1$

$k=-5$ から $k=4$ までたすと

$1+2+4+6+8+9+11+13+15+17$

$=\underline{86\text{個}}$ //

$\boxed{3}$

(1)

$P(\gcd(X_1, X_2, \cdots, X_n)=3)$

$= P($すべてが3か6 ∩ すべてが6ではない$)$

$= \dfrac{2^n-1}{6^n}$

(2)

$P(\gcd(X_1, \cdots, X_n)=1)$

$= 1 - P(\gcd(X_1, \cdots, X_n)=2$または4または6$)$

$\quad - P(\gcd(X_1, \cdots, X_n)=3)$

$\quad - P(\gcd(X_1, \cdots, X_n)=5)$

$= 1 - \dfrac{3^n}{6^n} - \dfrac{2^n-1}{6^n} - \dfrac{1}{6^n}$

$= \dfrac{6^n-3^n-2^n}{6^n}$

(3)

$P(\mathrm{lcm}(X_1, \cdots, X_n)=20)$

$= P($少なくとも1つ4と5がある ∩ 3と6が1つもない$)$

$= P(1,2,4,5$から出る$)$

$\quad - P(1,2,4$から出る∩4が1枚は出る$)$

$\quad - P(1,2,5$から出る∩5が1枚は出る$)$

$\quad - P(1,2$から出る$)$

$= \dfrac{4^n-(3^n-2^n)-(3^n-2^n)-2^n}{6^n}$

$= \dfrac{4^n-2\cdot 3^n+2^n}{6^n}$ //

$\boxed{4}$

(1)

$0<a_n<1 \cdots ①$ が成り立つことを数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき

$\quad 0<a_1=\alpha<1$ より成立

(ii) $n=k$ のとき ① が成り立つとする.

$n=k+1$ のとき

$\quad a_{k+1}=\sin\dfrac{\pi a_k}{2}$

であるが $0<a_k<1$ より

$\quad 0<\dfrac{\pi}{2}a_k<\dfrac{\pi}{2}$

より

$\quad 0<a_{k+1}<1$

つまりこのときも成立.

(i)(ii)より すべての自然数 n に対して ① が成立.

$g(x)=\sin\dfrac{\pi}{2}x - x \quad (0<x<1)$

とおく.

$g'(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x - 1$

$g''(x)=-\dfrac{\pi^2}{4}\sin\dfrac{\pi}{2}x<0$

$g'(x)$ は単調減少. $g'(0)=\dfrac{\pi}{2}-1>0$

$g'(1)=-1<0$ より

$g'(x)=0$ をみたす x が1つ存在し, それを α とする.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(1)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

以上より $g(x)>0$

$0<x<1$ のとき

$\quad \sin\dfrac{\pi}{2}x > x$

x に $0<a_n<1$ を代入すると

$a_{n+1}=\sin\dfrac{\pi}{2}a_n>a_n$.

(2)

$h(x)=\dfrac{1-f(x)}{1-x} \quad (0<x<1)$

とおく.

$h'(x)$

$= \dfrac{-f'(x)(1-x)-(1-f(x))(-1)}{(1-x)^2}$

$= \dfrac{1}{1-x}\left\{\dfrac{1-f(x)}{1-x}-f'(x)\right\}$

平均値の定理より

$$\begin{cases} \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}=f'(c) \\ x<c<1 \end{cases}$$

をみたす c が存在.

$h'(x)=\dfrac{1}{1-x}(f'(c)-f'(x))$

$f'(x)$ は単調減少より

$f'(c)<f'(x)$.

$\therefore h'(x)<0$

$h(x)$ は単調減少.

$0<b_n<1$ より $b_{n+1}=h(b_n)<b_n$

(3)

(2)より

$$b_{n-1}=\frac{1-a_n}{1-a_{n-1}}$$

$$\downarrow$$

$$0<1-a_n=b_{n-1}(1-a_{n-1})$$
$$=b_{n-1}\cdot b_{n-2}(1-a_{n-2})$$
$$\vdots$$
$$=b_{n-1}\cdots b_1\cdot(1-a_1)$$
$$<b_1^{\,n-1}(1-a_1)$$

ここで $b_1=\frac{1-a_2}{1-a_1}<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}b_1^{\,n-1}(1-a_1)=0$$

なので $\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\underline{1}\ /\!/$$

また

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-f(a_n)}{1-a_n}$$
$$=f'(1)$$
$$=\underline{0}\ /\!/$$

$\boxed{5}$

(1)

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt$$
$$=\int_0^x\left(\frac{1}{1-f(t)}+\frac{1}{f(t)}\right)f'(t)dt$$
$$=\Big[-\log|1-f(t)|+\log|f(t)|\Big]_0^x$$
$$=\left[\log\left|\frac{f(t)}{1-f(t)}\right|\right]_0^x$$
$$=\log\frac{f(x)}{1-f(x)}-\log\frac{1}{2}$$
$$=\log\frac{2f(x)}{1-f(x)}=ax=\log e^{ax}$$

$$\therefore \frac{2f(x)}{1-f(x)}=e^{ax}$$

$$\Leftrightarrow (2+e^{ax})f(x)=e^{ax}$$

$$\therefore f(x)=\underline{\frac{e^{ax}}{2+e^{ax}}}\ /\!/$$

(2)

$S(a)$

$$=\int_0^1\frac{e^{ax}}{2+e^{ax}}dx \qquad e^{ax}=t,\ ae^{ax}dx=dt$$
$$=\int_1^{e^a}\frac{\frac{1}{a}}{2+t}dt$$
$$=\frac{1}{a}\Big[\log|2+t|\Big]_1^{e^a}$$
$$=\frac{1}{a}\{\log(2+e^a)-\log 3\}$$
$$=\underline{\frac{1}{a}\log\frac{2+e^a}{3}}\ /\!/$$

$$\lim_{a\to+0}S(a)$$
$$=\lim_{a\to+0}\frac{\log\frac{2+e^a}{3}-\log\frac{2+e^0}{3}}{a-0}$$

$g(x)=\log\frac{2+e^x}{3}$ とすると

$$g'(x)=\frac{\frac{e^x}{3}}{\frac{2+e^x}{3}}=\frac{e^x}{2+e^x}$$

$$=g'(0)$$
$$=\underline{\frac{1}{3}}\ /\!/$$