2019 早稲田大理工系

[I]

(1) $n=5k$のとき

$$\begin{cases} n^2+1=25k^2+1 \\ 2n^2+3=50k^2+3 \\ 6n^2+5=150k^2+5=5(30k^2+1) \end{cases}$$

$30k^2+1 \neq 1$より $6n^2+5$は素数でないので nは(*)を満たさない.

(2)

(i) $n=5k+1$のとき $(k \geqq 0)$

$$\begin{cases} n^2+1=25k^2+10k+2 \\ 2n^2+3=50k^2+20k+5 \\ \quad =5(10k^2+4k+1) \\ 6n^2+5=150k^2+60k+11 \end{cases}$$

nが(*)を満たすためには $k=0$ つまり $n=1$ならば $2n^2+3$が素数になる.

(ii) $n=5k+2$のとき $(k \geqq 0)$

$$\begin{cases} n^2+1=25k^2+20k+5=5(5k^2+4k+1) \\ 2n^2+3=50k^2+40k+11 \\ 6n^2+5=150k^2+120k+29 \end{cases}$$

nが(*)を満たすには $k=0$ つまり $n=2$ならば n^2+1が素数になる.

(iii) $n=5k-1$のとき $(k \geqq 1)$

$$\begin{cases} n^2+1=25k^2-10k+2 \\ 2n^2+3=5(10k^2-4k+1) \\ 6n^2+5=150k^2-60k+11 \end{cases}$$

$10k^2-4k+1=1$になる自然数kは存在しない. $2n^2+3$は素数でない.

(iv) $n=5k-2$のとき. $(k \geqq 1)$

$$\begin{cases} n^2+1=5(5k^2-4k+1) \\ 2n^2+3=50k^2-40k+11 \\ 6n^2+5=150k^2-120k+29 \end{cases}$$

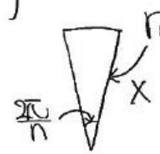
$5k^2-4k+1=1$になる自然数kは存在しない. n^2+1は素数でない.

(i)〜(iv)より $n=1,2$のみが(*)を満たす.

II.

P_nの外接円の半径をr_nとおく.

(1)



r_n $\frac{2\pi}{n}$ $\times n=1$

$\iff \frac{1}{2}r_n^2\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{n}$

$\iff r_n^2=\frac{2}{n\sin\frac{2\pi}{n}}$

$L_n= r_n\sin\frac{\pi}{n}\times 2\times n$

$L_n^2=\frac{2}{n\sin\frac{2\pi}{n}}\sin^2\frac{\pi}{n}\times 4n^2$

$=\frac{8n^2\sin^2\frac{\pi}{n}}{2n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}$

$=\underline{4n\tan\frac{\pi}{n}}$ //

(2)

$\lim_{n\to\infty}L_n$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{4\pi\cdot\frac{n}{\pi}\tan\frac{\pi}{n}}$

$=\sqrt{4\pi\cdot 1}=\underline{2\sqrt{\pi}}$ //

(3)

$f(x)=x\tan\frac{\pi}{x}$ $(x \geqq 3)$とおく

$f'(x)=\tan\frac{\pi}{x}+x\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{x}}\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)$

$=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{x}}\left(\sin\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\right)$

ここで$\frac{\pi}{x}=\theta$ $(0<\theta \leqq \frac{\pi}{3})$として

$g(\theta)=\sin\theta-\theta$ とおくと

$g'(\theta)=\cos\theta-1<0$

これより $g(\theta)$は単調減少.

$g(0)=0$より $g(\theta)<0$

つまり $x \geqq 3$のとき $f'(x)<0$

これより $f(x)$は単調減少.

∴ $n<k$ならば $(L_n)^2>(L_k)^2$

[III]

(1)

$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}-1\right\}<\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\right]\leqq\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}$

$\lim_{n\to\infty}(\text{最左辺})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}-\frac{1}{n}\right)$

$=1-0=1$

$\lim_{n\to\infty}(\text{最右辺})=1$ より

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\right]=\underline{1}$

(2)

$\sqrt{k}-1<[\sqrt{k}]\leqq\sqrt{k}$

より

$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-1)<\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]\leqq\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

$\Rightarrow\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-1)<\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]$

$\leqq\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

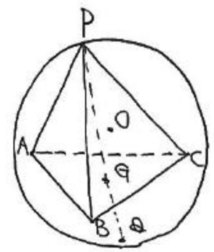
$\lim_{n\to\infty}(\text{最左辺})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$=\frac{2}{3}$

より

$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]=\underline{\frac{2}{3}}$

[IV]



(1) $|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2$ より

$|\vec{p}|^2=|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PO}|^2$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$

$\Leftrightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{a}=2\vec{a}\cdot\vec{p}$

(2) $\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\overrightarrow{PQ}=\frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$

$=-\vec{p}+\frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$|\overrightarrow{OQ}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2$ より

$|\vec{p}|^2-\frac{2k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\frac{k^2}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$

$=|\vec{p}|^2$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\frac{k}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$

$=0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c})$

$+\frac{k}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=0$

$\therefore\ k=\underline{\frac{3(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)}{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2}}$

(3) PG : PQ = 1 : 3 のとき $k=3$

このとき

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$

$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0\ \cdots☆$

$\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{b}\cdot\vec{c},\ \vec{c}\cdot\vec{a}$ のうち少なくとも1つは正かつ少なくとも1つは負である

または、すべてが0である。

これは∠APB, ∠BPC, ∠CPAにおいて少なくとも1つが鋭角、少なくとも1つが鈍角

(4) PG : PQ = 1 : 3 のとき $k=3$

$\overrightarrow{PQ}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$ (∵(3))

$=\frac{4}{3}\cdot 3=4$

$\therefore\ PQ=\underline{2}$

つまり直線PQはOを通る。

$\therefore\ \vec{p}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PG}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

(1)より

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\therefore\ 0=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ (∵☆)

$\therefore$ ∠APB = ∠BPC = ∠CPA = 90°

(四面体PABC)

$=\triangle APB\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3}$

$=\underline{\frac{4\sqrt{3}}{27}}$

[V]

(1)

$x=(1+\cos\theta)\cos\theta$

$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)$

$=-\sin\theta-\sin 2\theta$

$y=(1+\cos\theta)\sin\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta$

$=\cos\theta+\cos 2\theta$

より

$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$

$=(\sin\theta+\sin 2\theta)^2+(\cos\theta+\cos 2\theta)^2$

$=2+2(\cos\theta\cos 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta)$

$=2+2\cos(2\theta-\theta)$

$=2+2\cos 2\frac{\theta}{2}$

$=2+2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)$

$=4\cos^2\frac{\theta}{2}$

$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$

$=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}=\underline{\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|}$ //

(2)

$l(a)$

$=\int_a^{a+\frac{2\pi}{3}}\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

ここで $\frac{a}{2}\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}$ で

$-\pi\leqq a\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき

$-\frac{\pi}{2}\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

なので

$l(a)$

$=2\int_a^{a+\frac{2\pi}{3}}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$

$=2\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_a^{a+\frac{2\pi}{3}}$

$=4\left\{\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{a}{2}\right\}$

$=4\left(\frac{1}{2}\sin\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}\right)$

$=4\left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}}\cos\frac{a}{2}-\underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{\pi}{6}}\sin\frac{a}{2}\right)$

cosで合成

$=\underline{4\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$ //

(3)

$l(a)=\int_a^{a+\frac{2}{3}\pi}\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

ここで $\frac{a}{2}\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}$ で

$\frac{\pi}{3}\leqq a\leqq\pi$ のとき

$\frac{\pi}{6}\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{5}{6}\pi$

これをふまえ

$\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|=\begin{cases}2\cos\frac{\theta}{2} & (a\leqq\theta\leqq\pi)\\ -2\cos\frac{\theta}{2} & (\pi\leqq\theta\leqq a+\frac{2\pi}{3})\end{cases}$

なので

$l(a)$

$=2\int_a^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta+2\int_{\pi}^{a+\frac{2\pi}{3}}\left(-\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta$

$=4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_a^{\pi}-4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_{\pi}^{a+\frac{2\pi}{3}}$

$=-4\sin\frac{a}{2}-4\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+8$

$=-4\sin\frac{a}{2}-4\left(\frac{1}{2}\sin\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{a}{2}\right)+8$

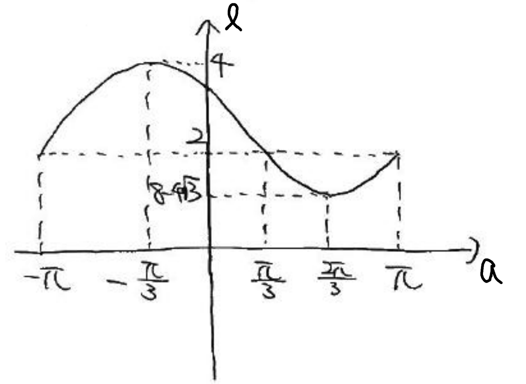
$=8-6\sin\frac{a}{2}-2\sqrt{3}\cos\frac{a}{2}$

$=8-4\sqrt{3}\left(\sin\frac{a}{2}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}}+\cos\frac{a}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{\pi}{6}}\right)$

$=8-4\sqrt{3}\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

まとめると

$l(a)=\begin{cases}4\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right) & \left(-\pi\leqq a\leqq\frac{\pi}{3}\right)\\ 8-4\sqrt{3}\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right) & \left(\frac{\pi}{3}\leqq a\leqq\pi\right)\end{cases}$



つまり

$a=-\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 4

$a=\frac{2\pi}{3}$ のとき最小値 $8-4\sqrt{3}$ //