2019 東京医科大

第1問

(1)

$3+i=\sqrt{10}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

とおく

$(3+i)^{1000}$

$=10^{500}(\cos 1000\alpha+i\sin 1000\alpha)$

ここで

$|a|+|b|>\sqrt{a^2+b^2}=10^{500}$

また

$|a|+|b|<10^{500}+10^{500}=2\cdot 10^{500}$

以上より $|a|+|b|$ は $\underline{501\text{ケタ}}$

$\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\eta=3$ より

$\alpha=\frac{\pi}{2}-\eta$

$\Leftrightarrow 1000\alpha=500\pi-1000\eta$

$\downarrow -397.6\pi<-1000\eta<-397.5\pi$

$102.4\pi<1000\alpha<102.5\pi$

72°の位置　　90°の位置

これより $\cos 1000\alpha<\sin 1000\alpha$ なので

$\underline{0<a<b}\cdots①$

(2)

$\xi^3-5\xi+3=0$

ここで

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 4 & \\ 1\ 3 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ & 1 & 3 & & \\ \hline & & -3 & -5 & \\ & & -3 & -9 & \\ \hline & & & 4 & 3 \\ & & & 4 & 12 \\ \hline & & & & -9 \end{array}$$

より

$(\xi+3)(\xi^2-3\xi+4)-9=0$

$\Leftrightarrow (\xi+3)(\xi^2-3\xi+4)=9$

$\Leftrightarrow \underline{\frac{1}{9}}\xi^2-\underline{\frac{1}{3}}\xi+\underline{\frac{4}{9}}=\frac{1}{\xi+3}$

$A\cdot x$ を x^2-3x+3 で割った余りは

$$\begin{array}{r|rrrrr} & & & 1 & 3 & 1 \\ 1\ -3\ 3 & 1 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ & 1 & -3 & 3 & & \\ \hline & & 3 & -8 & 3 & \\ & & 3 & -9 & 9 & \\ \hline & & & 1 & -6 & 0 \\ & & & 1 & -3 & 3 \\ \hline & & & & -3 & -3 \end{array}$$

$\underline{-3}x\underline{-3}$

$\therefore Ax=(x^2-3x+3)(x^2+3x+1)-3x-3$

$\Leftrightarrow \frac{Ax}{x^2-3x+3}=x^2+3x+1+\frac{-3x-3}{x^2-3x+3}\cdots①$

また

$A=(x+3)(x^2-3x+3)+x-6$

$\Leftrightarrow \frac{A}{x^2-3x+3}=x+3+\frac{x-6}{x^2-3x+3}$

$\Leftrightarrow \frac{3A}{x^2-3x+3}=3x+9+\frac{3x-18}{x^2-3x+3}$

①, ②より

$\frac{A(x+3)}{x^2-3x+3}=x^2+6x+10+\frac{-21}{x^2-3x+3}$

$\downarrow x=\xi$ を代入

$0=\xi^2+6\xi+10+\frac{-21}{\xi^2-3\xi+3}$

$\therefore \frac{\underline{21}}{\xi^2-3\xi+3}=\underline{\xi^2+6\xi+10}$

第2問

(1) 97

(2) $a_3=2^4\cdot 3\cdot 7$

$=\underline{336}$

(i) $S(0)=\sum_{k=1}^{n}1=n=5\cdot 3\cdot 2=\underline{30}$

$S(1)=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+7)$

$=31\cdot 13\cdot 8$

$=2^3\cdot 13\cdot 31$

素因数は大きい順に $\underline{31, 13, 2}$

(ii) $S(-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)$

$=\frac{1-\frac{1}{2^5}}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{13}{9}\cdot\frac{8}{7}$

$=\frac{31}{16}\cdot\frac{13}{9}\cdot\frac{8}{7}=\underline{\frac{403}{126}}$

$S(2)$

$=(1+2^2+2^4+2^6+2^8)(1+3^2+3^4)(1+7^2)$

$=\frac{1-2^{10}}{1-4}\cdot 91\cdot 50$

$=\frac{1023}{3}\cdot 91\cdot 50$

$\therefore \frac{S(2)}{S(1)}=\frac{\cancel{1023}^{\,\cancel{341}\ 11}\cdot\cancel{91}^{\,7}\cdot\cancel{50}^{\,25}}{\cancel{3}\cdot\cancel{31}\cdot\cancel{13}\cdot\cancel{8}^{\,4}}$

$=\underline{\frac{1925}{4}}$

(3)

$$\frac{1}{47}=\frac{A_1}{10^5}+\frac{A_2}{10^{10}}+\frac{A_3}{10^{15}}+\cdots+\frac{A_7}{10^{35}}+\cdots$$

のように区切っていき, A_7が分かればよい.

$$1=47\left(\frac{A_1}{10^5}+\frac{A_2}{10^{10}}+\cdots+\frac{A_6}{10^{30}}+\frac{A_7}{10^{35}}+\cdots\right)$$
$$=0.99999\cdots$$

$A_6\times47=87234\times47=4099998$

$A_8\times47=31914\times47=1499958$

より $A_7\times47=???????$ とすると

```
  4099998
       ???????
+            1499958
------------------------
…9999999 99 9 9999999…
```

以上より

$???????=199985$

$\therefore A_7=199985\div47=4255$

$=04255$

また

$$\frac{11}{47}=\frac{1}{47}\times10+\frac{1}{47}\text{より}$$

$d_{32}=4+2=\underline{6}$

$d_{45}=1+7=\underline{8}$

$d_{79}=d_{33}=2+5+1=\underline{8}$

$d_{92}=d_{46}=7+0=\underline{7}$

```
  04255
+ 42553
-------
      ?
```

第3問

$y=f(x)$の$P(t,f(t))$における法線は

$$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$$

$\downarrow$ $(6t^2+t-9\sqrt{t},0)$通る

$$0=-\frac{1}{f'(t)}(6t^2-9\sqrt{t})+f(t)$$

$$\Leftrightarrow 6t^2-9\sqrt{t}=f(t)f'(t)\cdots①$$

$\downarrow t=a$

$$6a^2-9\sqrt{a}=\underbrace{f(a)}_{0}f'(a)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{a}(2a^{\frac{3}{2}}-3)=0$$

$a>0$ より $a^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$, $\underline{a^3=\frac{9}{4}}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)^2-f(1)^2}{h}=\left[\{f(t)^2\}'\right]_{t=1}$$
$$=2f(1)f'(1)$$
$$=\underline{-6}$$

①をtで不定積分すると

$$\frac{1}{2}\{f(t)\}^2=2t^3-6t^{\frac{3}{2}}+C$$

$\downarrow t=a$

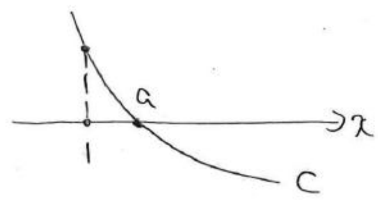
$$0=2a^3-6a^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{9}{2}-9+C$$

$\therefore C=\frac{9}{2}$

$$\therefore\{f(t)\}^2=4t^3-12t^{\frac{3}{2}}+9$$
$$=(2t\sqrt{t}-3)^2$$

$\therefore f(t)=\pm(2t\sqrt{t}-3)$

Cの$(a,0)$における法線の傾きが正なので



$f'(a)<0$

ところで $f'(t)=\pm3\sqrt{t}$ より

$f'(a)<0$から $f'(t)=-3\sqrt{t}$.

$\therefore f(t)=-2t\sqrt{t}+3$

$\therefore f(1)^2+f(1)=1^2+1=\underline{2}$

$f(4)^2+f(4)=(-13)^2-13=\underline{156}$

第4問

$(h\circ\Phi)(a)$

$=h(\Phi(a))$

$=h((g\circ f)(a))$

$=h(g(f(a)))$

また

$(\Phi\circ f)(a)$

$=\Phi(f(a))$

$=(h\circ g)(f(a))$

$=h(g(f(a)))$

以上よりどんな実数aについても

$(h\circ\Phi)(a)=(\Phi\circ f)(a)$