2019 東邦大(医)

1

必要条件

$$\lim_{x\to0}(分子)=-1+1=0$$

$$\lim_{x\to0}f(x)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(ax-1)^2-(x^2+(a+2)x+1)}{x^2\left(ax-1-\sqrt{x^2+(a+2)x+1}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(a^2-1)x^2-(3a+2)x}{\vdots}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(a^2-1)x-(3a+2)}{x\left(ax-1-\sqrt{x^2+(a+2)x+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\{(a^2-1)x-(3a+2)\}=0$$
$$\therefore a=-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}$$

このとき

$$\lim_{x\to0}f(x)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2-1}{ax-1-\sqrt{x^2+(a+2)x+1}}$$
$$=\frac{a^2-1}{-2}=\frac{5}{18}$$

2

$\tilde{x}=12$なので

$$\overbrace{??\cdots?}^{22コ},12,\overbrace{12\cdots12}^{22コ}$$

$\bar{x}$が最小をとるときは下位がすべて3のとき

$$\therefore \min\bar{x}=\frac{1}{45}(3\times22+12\times23)$$
$$=\frac{342}{45}=\frac{38}{5}$$

$\tilde{x}=6$のとき

$$\overbrace{??\cdots?}^{22コ},6,\overbrace{??\cdots?}^{22コ}$$

$$\max\bar{x}=\frac{1}{45}(6\times23+12\times22)=\frac{402}{45}$$
$$\min\bar{x}=\frac{1}{45}(3\times22+6\times23)=\frac{204}{45}$$
$$\therefore \max|\bar{x}-6|=\frac{402-270}{45}=\frac{132}{45}$$
$$=\frac{44}{15}$$

3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\frac{1-3x}{2\sqrt{3}\sqrt{x}}$$

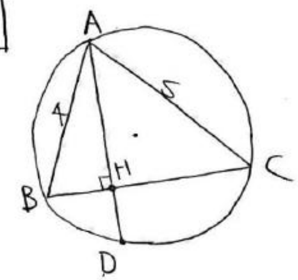
$x=\frac{1}{3}$で$f'(x)$が+から−になるので

$$\alpha=\frac{1}{3}$$

$\alpha\leqq x\leqq3$の$f(x)$の長さは

$$\int_\alpha^3\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$
$$=\int_\alpha^3\sqrt{1+\frac{9x^2-6x+1}{12x}}\,dx$$
$$=\int_\alpha^3\sqrt{\frac{9x^2+6x+1}{12x}}\,dx$$
$$=\int_\alpha^3\frac{\sqrt{(3x+1)^2}}{2\sqrt{3}\sqrt{x}}\,dx$$
$$=\int_\alpha^3\frac{3x+1}{2\sqrt{3}\sqrt{x}}\,dx$$
$$=\int_\alpha^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}x^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{3}}^{3}$$
$$=3+1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)$$
$$=4-\frac{1}{9}-\frac{3}{9}=\frac{32}{9}$$

4



余弦定理

$$\cos\angle ABC=\frac{16+36-25}{2\cdot4\cdot6}$$
$$=\frac{27}{2\cdot4\cdot6}=\frac{9}{16}$$
$$\therefore BH=4\cos\angle ABC=\frac{9}{4}$$
$$CH=6-\frac{9}{4}=\frac{15}{4}$$
$$\frac{BH}{CH}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

$$AH=4\sin\angle ABC$$
$$=4\cdot\frac{\sqrt{256-81}}{16}$$
$$=\frac{\sqrt{175}}{4}=\frac{5\sqrt{7}}{4}$$

方べきの定理より

$$AH\cdot DH=BH\cdot CH$$
$$\therefore DH=\frac{9}{4}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{5\sqrt{7}}$$
$$=\frac{27}{4\sqrt{7}}$$
$$\frac{AH}{DH}=\frac{5\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{4\sqrt{7}}{27}$$
$$=\frac{35}{27}$$

$\boxed{5}$

$\overset{1つとみる}{\overbrace{ICI}}$

M, E, D, ICI, N, E

の同じものを含む順列.

$\dfrac{6!}{2!} = \underline{360通り}$

$\leftarrow$ CとI…①

$\vee M \vee E \vee D \vee N \vee E \vee \leftarrow$ 下…②

① CとIの置き方は, 3つ離れているとき

$\underbrace{{}_6C_3}_{場所} \cdot \underbrace{\dfrac{3!}{2!1!}}_{並び方} = 60$

I 2つが並んでいるとき

$\underbrace{{}_6C_2}_{場所} \cdot \underbrace{2}_{並び方} = 30$

② 下の並び方は

$\dfrac{5!}{2!} = 60$

以上より) $(60+30)\times 60 = \underline{5400}$

$\boxed{6}$

$x+y=k$ とおくと

$y=-x+k$ を2次式に代入

$2x^2+3x(-x+k)+2(-x+k)^2-14k+21$

$= x^2-kx+2k^2-14k+21$

$D=(-k)^2-4(2k^2-14k+21)$

$=-7k^2+56k-84 \geqq 0$

$\Leftrightarrow k^2-8k+12 \leqq 0$

$\Leftrightarrow \underline{2} \leqq k = x+y \leqq \underline{6}$

$xy=l$ とおくと

$2x^2+3xy+2y^2-14x-14y+21$

$=2(x+y)^2-xy-14(x+y)+21$

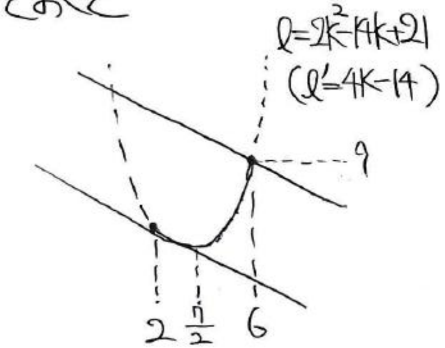
$=2k^2-l-14k+21=0$

$\Leftrightarrow l=2k^2-14k+21 \quad (2\leqq k\leqq 6)$

$(x+1)(y+1)=xy+x+y+1$

$=l+k+1=\alpha$

とおくと



αが最大をとるときは $k=6,\ l=9$ のとき. このとき $\alpha=16$

αが最小をとるときは接するとき.

$2k^2-14k+21=-k+\alpha-1$

$\Leftrightarrow 2k^2-13k+22-\alpha=0$

$D=13^2-4\cdot 2(22-\alpha)$

$=8\alpha+169-176$

$=8\alpha-7=0 \quad \therefore \alpha=\dfrac{7}{8}$

以上より) $\underline{\dfrac{7}{8}} \leqq \alpha=(x+1)(y+1) \leqq \underline{16}$

$\boxed{7}$ $a_n=1$ とすると不成立なので $a_n\neq 1$.

$a_{n+2}(1-a_n)=a_{n+1}-a_n-1$

$\Leftrightarrow a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}-a_n-1}{1-a_n}$

$a_3=\dfrac{3-3-1}{1-3}=\dfrac{1}{2}$

$a_4=\dfrac{\frac{1}{2}-3-1}{1-3}=\dfrac{7}{4}$

$a_5=\dfrac{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

$a_6=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{7}{4}-1}{1-\frac{7}{4}}=3$

$a_7=\dfrac{3-\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}}=3$

以上より) 5コ周期.

$a_{104}=a_4=\underline{\dfrac{7}{4}}$

周期5コをたすと

$3+3+\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{35}{4}$

$2019 \div \dfrac{35}{4}$

$=2019\times\dfrac{4}{35}$

$=\dfrac{8076}{35}$

$=230+\dfrac{26}{35}$

$$\begin{array}{r} 230 \\ 35\,\overline{)\,8076} \\ 70 \\ \hline 107 \\ 105 \\ \hline 26 \end{array}$$

230周期たすと

$230\times\dfrac{35}{4}=\dfrac{115\cdot 35}{2}$

$=\dfrac{4025}{2}$

$\dfrac{13}{2}$ たりない), つまり最後に $3+3+\dfrac{1}{2}$ が必要.

$\therefore N=230\times 5+3=\underline{1153}$

$\boxed{8}$

3次関数は変曲点に関して点対称.

$y''=6x+2$

$x=-\dfrac{1}{3}$ のとき $y''=0$. このとき

$y=-\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{a}{3}$

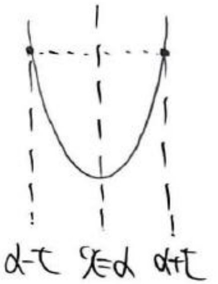
$=\dfrac{-1+3-9a}{27}=0$

であればいいので $a=\underline{\dfrac{2}{9}}$.

$y' = 4x^3+3x^2+2x+b$

$y'' = 2(6x^2+3x+1) > 0$

$(\because D<0)$



$(\alpha+t)^4+(\alpha+t)^3+(\alpha+t)^2+b(\alpha+t)$

$= (\alpha-t)^4+(\alpha-t)^3+(\alpha-t)^2+b(\alpha-t)$

$\Leftrightarrow 8\alpha^3t+8\alpha t^3+6\alpha^2t+2t^3+4\alpha t+2bt=0$

$\Leftrightarrow (4\alpha+1)t^3+(4\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha+b)t=0$

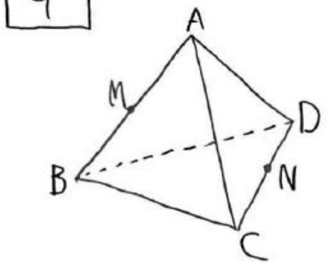
これが任意のtについて成り立つので

$$\begin{cases} 4\alpha+1=0 \\ 4\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha+b=0 \end{cases}$$

$\therefore \alpha=-\frac{1}{4} \quad b=-\frac{1}{16}-\frac{3}{16}+\frac{1}{2}$

$=\underline{\frac{3}{8}}$ //

$\boxed{9}$



$MN=\sqrt{AN^2-AM^2}$

$=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ //

ACを母線, ANを底面の半径とした円錐の体積は

$AN^2\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{8}$.

MCを母線, MNを底面の半径とした円錐の体積は

$MN^2\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{12}$

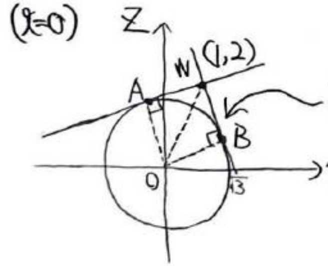
求める体積は

$\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12}=\underline{\frac{\pi}{24}}$ //

$\boxed{10}$

yz平面で考える

(x=0)



ここの四角形に注目.

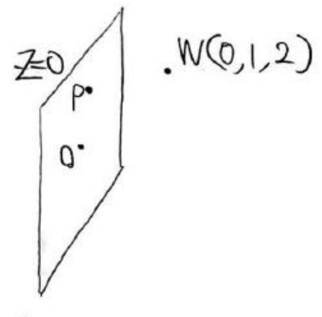
AB=2r とおくと四角形の面積に関して

$\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times2=\sqrt{5}\times2r\times\frac{1}{2}$

$\therefore r=\sqrt{\frac{6}{5}}$

求める円の面積は

$r^2\pi=\underline{\frac{6}{5}\pi}$ //



$P(\alpha,\beta,0)$ とおく

直線PWは

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overrightarrow{OW}+t\overrightarrow{WP}$

$=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\alpha\\\beta-1\\-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\alpha t\\(\beta-1)t+1\\-2t+2\end{pmatrix}$

直線PW上の接点が球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 上にあるので

$\alpha^2t^2+\{(\beta-1)t+1\}^2+(-2t+2)^2$

$=\{\alpha^2+(\beta-1)+4\}t^2$

$+\{2(\beta-1)-8\}t+5=3$

$\Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2-2\beta+5)t^2+2(\beta-5)t$

$+2=0$

ここで

$\frac{D}{4}=(\beta-5)^2-(\alpha^2+\beta^2-2\beta+5)2$

$=-2\alpha^2-\beta^2-6\beta+15=0$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2+(\beta+3)^2=24$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{12}+\frac{(\beta+3)^2}{24}=1$

この軌跡の面積は

$2\sqrt{3}\times2\sqrt{6}\times\pi=\underline{12\sqrt{2}\pi}$ //