2019 東大 理系前期

第1問

(与式)

$$=\int_0^1\left\{x^2+\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$+\int_0^1\left\{\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right\}dx$$

ここで前の項は

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{2}{3}.$$

後の項は $x=\tan\theta$ とおくと

$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ 　 $\begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \theta & 0\to \frac{\pi}{4}\end{array}$

より

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan^3\theta}{\frac{1}{\cos^3\theta}}+\frac{\tan^2\theta}{\frac{1}{\cos^4\theta}}\right)\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2\theta\sin\theta+\sin^2\theta)d\theta$$

（$\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}-1$）

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\left[+\frac{1}{\cos\theta}+\cos\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

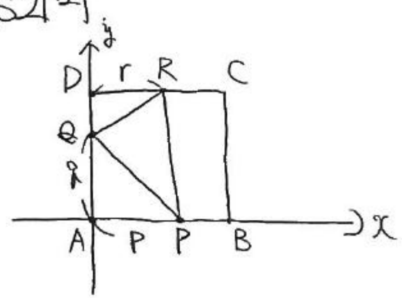
$$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}-2$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{9}{4}$$

つまり

$$(\text{与式})=\frac{\pi}{8}+\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{35}{12}$$

第2問



図のように

$A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$

$P(p,0)$, $Q(0,q)$, $R(r,1)$ とおく。

$$\triangle APQ=\frac{1}{2}pq=\frac{1}{3}$$

$$\therefore p=\frac{2}{3q}$$

ちなみに $0\leqq p\leqq 1$ より

$0\leqq\frac{2}{3q}\leqq 1$ 　 $\therefore \frac{2}{3}\leqq q\leqq 1.$

$\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix} r \\ 1-q\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3q} \\ -q\end{pmatrix}$

より

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\left|-rq-\frac{2}{3q}+\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2}{3}-\left(rq+\frac{2}{3q}\right)\right|=\frac{2}{3}$$

$$\therefore rq+\frac{2}{3q}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore r=\frac{4}{3q}-\frac{2}{3q^2}$$

$$\frac{DR}{AQ}=\frac{4}{3q^2}-\frac{2}{3q^3}=f(q) \text{ とおく。}$$

$$f'(q)=-\frac{8}{3}\frac{1}{q^3}+2\frac{1}{q^4}$$

$$=\frac{6-8q}{3q^4}$$

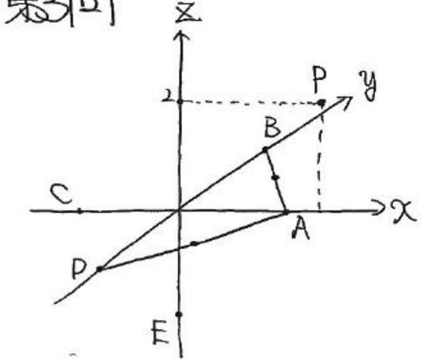
q	$\frac{2}{3}$ ⋯ $\frac{3}{4}$ ⋯ 1
$f'(q)$	＋ 0 －
$f(q)$	$\frac{3}{4}$ ↗ $\frac{64}{81}$ ↘ $\frac{2}{3}$

増減表より

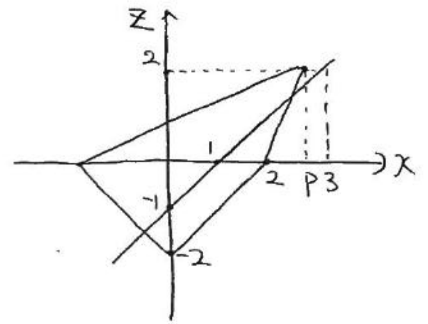
$q=\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{64}{81}$

$q=1$ で最小値 $\frac{2}{3}$

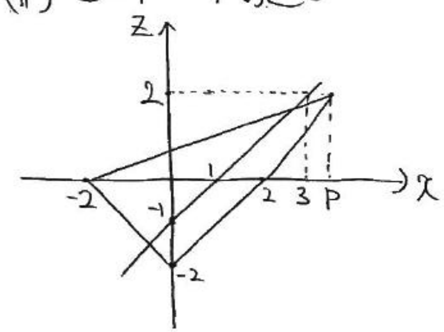
第3問



(1) (i) $2<p\leqq 3$ のとき



(ii) $3\leqq p<4$ のとき



(2) (i)(ii) のどちらのケースも

l が直線 CE, DE, BE, DA, BA

と交わる。図から直線 DP, BP

と交わるのは (ii) のケースで

(i)はこれらと交わらないので交点が8コにならない．(ii)で $P \neq 3$ であれば直線CPも含め8つの直線と交わることになり，αによる切り口が八角形となる．

$\therefore \underline{3 < P < 4}$ //

(3)

$3 < P < 4$ のとき

直線DE: $x=0,\ z=-y-2$

〃 BE: $x=0,\ z=y-2$

〃 DP: $z=\frac{2}{p}x=y+2$

〃 BP: $z=\frac{2}{p}x=-y+2$

〃 DA: $z=0,\ y=x-2$

〃 BA: $z=0,\ y=-x+2$

〃 CE: $z=-x-2,\ y=0$

〃 CA: $z=\frac{2}{p+2}(x+2),\ y=0$

これらと α: $z=x-1$ の交点は上から順に

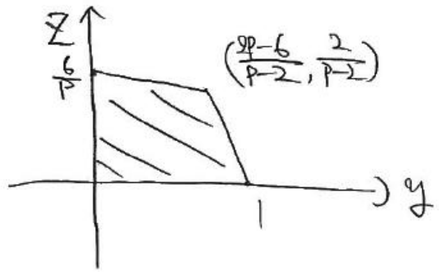
$(0,-1,-1),\ (0,1,-1)$

$\left(\frac{p}{p-2}, \frac{6-2p}{p-2}, \frac{2}{p-2}\right), \left(\frac{p}{p-2}, \frac{2p-6}{p-2}, \frac{2}{p-2}\right)$

$(1,-1,0),\ (1,1,0)$

$\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{6+p}{p}, 0, \frac{6}{p}\right)$

$y \geq 0,\ z \geq 0$ のみ書くと



面積は

$\frac{6}{p} \cdot \frac{2p-6}{p-2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{2}{p-2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{6p-18}{p} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-2}$

$= \underline{\frac{7p-18}{p(p-2)}}$ //

第4問

(1) $d_n = \gcd(n^2+1, 4)$

(i) $n=2k-1\ (k \in \mathbb{N})$ のとき

$n^2+1 = 4k^2-4k+2$

$= 4(k^2-k)+2$

$\therefore d_n = \underline{2}$ //

(ii) $n=2k\ (k \in \mathbb{N})$ のとき

$n^2+1 = 4k^2+1$

$\therefore d_n = \underline{1}$ //

(2)

$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数 m の2乗で表せるとすると

$(n^2+1)(5n^2+9) = m^2$

$\iff 5n^4+14n^2+9 = m^2$

$\iff n^2(5n^2+14) = (m+3)(m-3)$

↓

$5n^2+14 = m+3$

$-)\quad n^2 = m-3$

$4n^2+14 = 6$

これを満たす自然数 n は存在しない．

故に $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の2乗にならない．

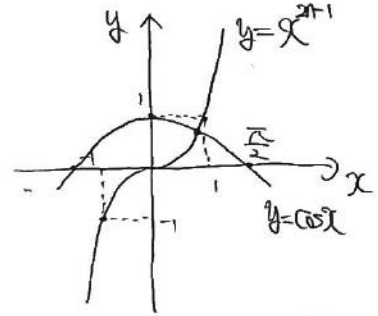
第5問

(1) $f(x) = x^{2n-1}$ とおく．

$f'(x) = (2n-1)x^{2n-2}$

$= (2n-1)(x^{n-1})^2 \geq 0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗



図より $0 < x < 1$ に $x^{2n-1} = \cos x$ ただ1つの実数解をもつ．

(2) $0 < a_n < 1$ が存在し，$y=\cos x$ は $0 < x \leq 1$ で単調減少なので

$\cos a_n > \cos 1$

(3) (2)より

$\cos 1 < \frac{\cos a_n}{a_n^{2n-1}} < 1$

$\iff (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$

$\lim_{n \to \infty} (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} = 1$ より

$a = \lim_{n \to \infty} a_n = \underline{1}$ //

また

$a_n^{2n-1}=\cos a_n$

$\Leftrightarrow a_n^{2n}=a_n\cos a_n$

$\therefore a_n^{n}=\sqrt{a_n\cos a_n}$

より $b=\lim_{n\to\infty}a_n^n=\sqrt{\cos 1}$ //

$c=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{a_n\cos a_n}-\sqrt{\cos 1}}{a_n-1}$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x\cos x}-\sqrt{1\cdot\cos 1}}{x-1}$

ここで $g(x)=\sqrt{x\cos x}$ とおく.

$g'(x)=\frac{1}{2}(x\cos x)^{-\frac{1}{2}}(\cos x-x\sin x)$

$\therefore c=g'(1)$

$=\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos 1-\sin 1}{\sqrt{\cos 1}}=\dfrac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$ //

第6問.

(1)

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ のすべてが実数ならば

$\alpha\beta+\beta\delta$ の虚部がすべて0になる.

1つだけ虚数になることはないので

すべて虚数の場合を考える.

(i) $\beta=\bar{\alpha}$, $\delta=\bar{\gamma}$ のとき

$\alpha\beta+\gamma\delta=|\alpha|^2+|\gamma|^2$ となり

虚部が0になり不適.

(ii) $\gamma=\bar{\alpha}$, $\delta=\bar{\beta}$ のとき

$\alpha=p+qi$ $\beta=r+si$ とおく

$\mathrm{Im}(\alpha\beta+\gamma\delta)$

$=\mathrm{Im}((p+qi)(r+si)+(p-qi)(r-si))$

$=ps+rq-ps-rq=0$

(iii) $\delta=\bar{\alpha}$, $\gamma=\bar{\beta}$ のとき

(ii)と同様に虚部は0.

(i)〜(iii)より $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ がすべて虚数になることはない).

つまり ちょうど2つが実数で, 残りの2つは互いに共役な複素数となる.

(2)

$\alpha\beta+\gamma\delta$ の虚部が0でないので

$\beta=\bar{\alpha}$ とはならない. $\gamma=\bar{\alpha}$ とする.

$\alpha=p+qi$, $\gamma=p-qi$ とおく

$\mathrm{Re}(\alpha\beta+\gamma\delta)$

$=\mathrm{Re}(\alpha\beta+\bar{\alpha}\delta)$

$=p(\beta+\delta)=0$

(i) $p=0$ のとき

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\beta+\delta=2$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha+\alpha\gamma+\beta\delta$

$=\alpha\beta+\beta\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\delta+\delta\alpha+|\alpha|^2+\beta\delta$

$=\underset{0}{(\alpha+\bar{\alpha})}(\beta+\delta)+|\alpha|^2+\beta\delta$

$=q^2+\beta\delta=0$

$\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta$

$=|\alpha|^2(\beta+\delta)+(\alpha+\bar{\alpha})\beta\delta$

$=2q^2=2a$

$\alpha\beta\gamma\delta=q^2\beta\delta=b$

↓

$\begin{cases} q^2+\beta\delta=0 \\ q^2=a \\ q^2\beta\delta=b \end{cases}$ $\therefore b=-a^2$

(ii) $\beta+\delta=0$ のとき

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2p=2$

$\therefore p=1$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha+\alpha\gamma+\beta\delta$

$=2p(\beta+\delta)+|\alpha|^2+\beta\delta$

$=|\alpha|^2+\beta\delta=0$

$\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta$

$=2p\beta\delta=2a$ $\therefore a=\beta\delta$

$\alpha\beta\gamma\delta=|\alpha|^2\beta\delta=b$

これらより $b=-a^2$

つまり(i)(ii)どちらでも $b=-a^2$ //

(3) (i) $p=0$ のとき

$\alpha+\beta=\beta+qi=x+yi$ とおく.

$\beta+\delta=2\Leftrightarrow\delta=2-x$.

$q^2+\beta\delta=y^2+x(2-x)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2-y^2=1$

$q=y\neq 0$, $\beta=x\neq 0$.

(ii) $\beta+\delta=0$ のとき

$\alpha+\beta=p+\beta+qi=1+\beta+qi$

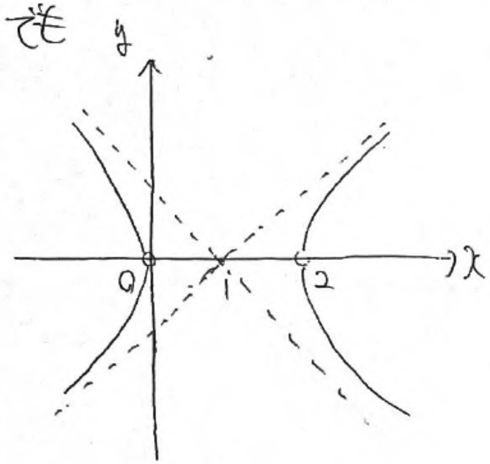
$=x+yi$ とおく

$|\alpha|^2+\beta\delta$

$=1+y^2+(x-1)(1-x)=0$

$\therefore(x-1)^2-y^2=1$ $(q=y\neq 0)$ $(\beta=x-1\neq 0)$

以上より(i)(ii)どちらの場合でも



$$(x-1)^2-y^2=1 \quad (y\neq 0)$$