2019 上智大 理工

$\boxed{1}$

(1) $P(x_P, -1, z_P)$ とおくと

$$\begin{cases} \vec{OA}\cdot\vec{OP} = -x_P - 2 + 2\sqrt{2}z_P = 0 \\ \vec{OB}\cdot\vec{OP} = -2 + \sqrt{2}z_P = 0 \quad \therefore z_P = \sqrt{2} \end{cases}$$

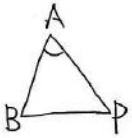
$\underline{P(2, -1, \sqrt{2})}$ //

$$\cos\angle BAP = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AP}}{|\vec{AB}||\vec{AP}|}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{20}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{3}}$$



$$= \underline{\frac{\sqrt{15}}{6}} \text{ //}$$

$$\triangle ABP = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{AB}|^2|\vec{AP}|^2 - (\vec{AB}\cdot\vec{AP})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 20 - 5^2}$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{35}}{2}} \text{ //}$$

(2)

$Q(X, Y, Z)$ とおく.

$$AQ^2 = BQ^2$$

$$\Leftrightarrow (X+1)^2 + (Y-2)^2 + (Z-2\sqrt{2})^2 = X^2 + (Y-2)^2 + (Z-\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow 2X + 1 - 2\sqrt{2}Z + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2X - 2\sqrt{2}Z + 7 = 0$$

また

$$OQ^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = 6$$

$$X = \sqrt{2}Z - \frac{7}{2}$$

$$2Z^2 - 7\sqrt{2}Z + \frac{49}{4} + Y^2 + Z^2 = 6$$

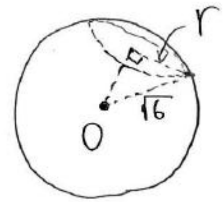
$$\Leftrightarrow 3Z^2 - 7\sqrt{2}Z + Y^2 + \frac{25}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(Z - \frac{7\sqrt{2}}{6}\right)^2 + Y^2 = \frac{98}{12} - \frac{75}{12} = \frac{23}{12}$$

$$\max Y = \sqrt{\frac{23}{12}} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}} = \underline{\frac{\sqrt{69}}{6}} \text{ //}$$

$$\max Z = \frac{7\sqrt{2}}{6} + \sqrt{\frac{23}{36}}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{23} + 7\sqrt{2}\right) \text{ //}$$



Q の軌跡は球面 $x^2+y^2+z^2=6$ と平面 $2x - 2\sqrt{2}z + 7 = 0$ の交点.

この平面と原点の距離は

$$\frac{|7|}{\sqrt{4+8}} = \frac{7}{2\sqrt{3}}$$

三平方の定理より求める半径 r は

$$r = \sqrt{6 - \frac{49}{12}}$$

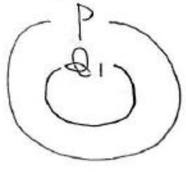
$$= \sqrt{\frac{23}{12}} = \underline{\frac{\sqrt{69}}{6}} \text{ //}$$

$\boxed{2}$

(1) B, C,

(2)

(i)



q_1 は P であるための $\underline{C}$ //

(ii) q_2 は P であるための $\underline{A}$ //

(iii) 反例: $a_n = 2(-1)^n$

$q_3 \;\cancel{\Longleftrightarrow}\; P$

q_3 は P であるための $\underline{B}$ //

(iv) 反例: $a_n = 2 + \frac{1}{n}$

$q_4 \;\cancel{\Longleftrightarrow}\; P$

反例: B

q_4 は P であるための $\underline{D}$ //

(v)

$q_5 \;\cancel{\Longleftrightarrow}\; P$

反例: B

q_5 は P であるための $\underline{C}$ //

(3)

$\bar{P}$:「すべての自然数 N に対して, $a_n > 2$ をみたす N 以上の n が存在」

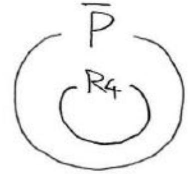
(i)

r_1 は $\bar{P}$ であるための $\underline{B}$ //

(ii) r_2 は $\bar{P}$ であるための $\underline{A}$ //

(iii) r_3 は $\bar{P}$ であるための $\underline{A}$ //

(iv)



r_4は$\overline{P}$であるための$\underline{C}$ //

(v) 反例：$a_n=2$

$r_5 \cancel{\Longleftrightarrow} \overline{P}$

反例：$a_n=3$

r_5は$\overline{P}$であるための$\underline{P}$ //

(vi) 反例 $a_1=3,\ a_n=2\ (n\geqq 2)$

$r_6 \cancel{\Longleftrightarrow} \overline{P}$

反例 $a_1=2,\ a_n=3\ (n\geqq 2)$

r_6は$\overline{P}$であるための$\underline{D}$ //

$\boxed{3}$

(1) $a_5=[5\log_2 3]$

$=[\log_2 243]$

$2^7<243<2^8$ より

$a_5=\underline{7}$ //

(2) $b_3=\left[\dfrac{3\alpha}{\alpha-1}\right]$

$=\left[\dfrac{\log_2 27}{\log_2 \frac{3}{2}}\right]=k$

$k\leqq \dfrac{\log_2 27}{\log_2 \frac{3}{2}}<k+1$

$\Longleftrightarrow k\log_2\frac{3}{2}\leqq \log_2 27<(k+1)\log_2\frac{3}{2}$

$\Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^k\leqq 3^3<\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{3^{k-3}}{2^k}\leqq 1<\dfrac{3^{k+1-3}}{2^{k+1}}$

$\therefore\ \underline{c=-3}$ // $\quad k=b_3=\underline{8}$ //

(3)

$a_n=[\log_2 3^n]\leqq 10$

$\log_2 3^n<11$

$\Longleftrightarrow 3^n<2^{11}=2048$

$\therefore\ n\leqq 6\quad \underline{6個}$ //

(4)

$b_n=\left[\dfrac{\log_2 3^n}{\log_2\frac{3}{2}}\right]\leqq 10$

$\dfrac{\log_2 3^n}{\log_2\frac{3}{2}}<11$

$\Longleftrightarrow \log_2 3^n<11\log_2\frac{3}{2}$

$\Longleftrightarrow 3^n<\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$

$\Longleftrightarrow \underset{2048}{2^{11}}<3^{11-n}\qquad 3^7=2187$

$\therefore\ n\leqq 4\quad \underline{4個}$ //

(5) $a_n\leqq 50$

$\Longleftrightarrow \log_2 3^n<51$

$\Longleftrightarrow 3^n<2^{51}$

$\therefore\ 3^s<2^{51}\cdots☆$

また

$b_n\leqq 50$

$\Longleftrightarrow 2^{51}<3^{51-n}$

$\therefore\ 2^{51}<3^{51-t}$

☆は $3^s<2^{51}<3^{s+1}$ とできるので

$s+1=51-t$

$\therefore\ s+t=\underline{50}$ //

$\boxed{4}$

(1)

$a(x-t)^2=0$ とおける.

$\Longleftrightarrow ax^2-2atx+at^2=0$

$\Longleftrightarrow ax^2-(2at+1)x+at^2+2=-x+2$

左辺がCより原点を通るので

$at^2+2=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{2}{t^2}$ $\boxed{負だとわかる}$

$C: y=a\left\{x^2-\dfrac{2at+1}{a}x\right\}$

$=a\left(x-\dfrac{2at+1}{2a}\right)^2-\dfrac{(2at+1)^2}{4a}$

Aのx座標は

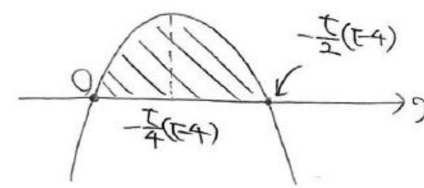
$t+\dfrac{1}{2a}=t-\dfrac{t^2}{4}$

Aのy座標は

$-\dfrac{1}{4a}\left(-\dfrac{4}{t}+1\right)^2=\dfrac{t^2}{8}\left(1-\dfrac{4}{t}\right)^2$

$\therefore\ \underline{A\left(\dfrac{-1}{4}t(t-4),\ \dfrac{1}{8}(t-4)^2\right)}$ //

(2) $0<t<4$のとき, $a<0$より



(面積)

$=\dfrac{1}{6}|a|\left\{-\dfrac{t}{2}(t-4)\right\}^3$ $\boxed{\frac{1}{6}公式}$

$=\dfrac{1}{3t^2}\cdot\dfrac{t^3}{8}(4-t)^3$

$=\dfrac{t}{24}(4-t)^3=f(t)$ とおく

$$f'(t)=\frac{1}{24}(4-t)^3+\frac{t}{24}(-3)(4-t)^2$$
$$=\frac{1}{24}(4-t)^2(4-4t)$$
$$=\frac{1}{6}(4-t)^2(1-t)$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(t)$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$
$f(t)$	$\times$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$

$$\max f(t)=f(1)=\frac{27}{24}=\frac{9}{8}$$

(3)

$$D:\begin{cases} x=-\frac{t}{4}(t-4) \\ y=\frac{1}{8}(t-4)^2 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}(t-4)}{-\frac{1}{4}(t-4)-\frac{t}{4}}=\frac{-t+4}{2t-4}$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}(2t-4)+2}{2t-4}$$
$$=\frac{1}{t-2}-\frac{1}{2}$$

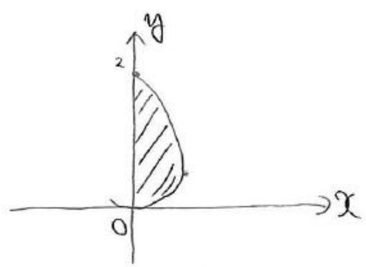
$x=-\frac{t}{4}(t-4)<0 \quad \therefore t>4 \ (t>0)$

$$k=\frac{1}{t-2}-\frac{1}{2} \quad (t>4)$$

$$\therefore -\frac{1}{2}<k<0$$

(4)

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
x	(0)	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$
$\frac{dy}{dt}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	(2)	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



(面積)

$$=\int_0^2 x\,dy$$
$$=\int_4^0 x\frac{dy}{dt}dt$$
$$=\int_0^4 \frac{t}{4}(t-4)\frac{1}{4}(t-4)dt$$
$$=\frac{1}{16}\int_0^4 t(t-4)^2dt$$
$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{12}4^4=\frac{4}{3}$$

$\boxed{\frac{1}{12}\text{公式}}$

(5)

$$x+2y=-\frac{1}{4}t^2+t+\frac{1}{4}(t^2-8t+16)$$
$$=-t+4$$
$$\Downarrow$$
$$(x+2y)^2=(-t+4)^2=8y$$
$$\Longleftrightarrow x^2+4xy+4y^2-8y=0$$