2019 順天堂大(医)

$\boxed{\text{I}}$

(1)

(a)

$w+\overline{w}$

$= z+z^2+z^4+\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}$

$= z+z^2+z^4$
$\quad +\left(\cos\frac{12}{7}\pi+i\sin\frac{12}{7}\pi\right)$
$\quad +\left(\cos\frac{10}{7}\pi+i\sin\frac{10}{7}\pi\right)$
$\quad +\left(\cos\frac{6}{7}\pi+i\sin\frac{6}{7}\pi\right)$

$= z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3$

$= \dfrac{z-z^7}{1-z} = \underline{-1}$ $(\because z^7=1)$

$w\cdot\overline{w}$

$= (z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)$

$= z^4(1+z+z^3)(1+z^2+z^3)$

$= z^4(1+z+z^3+z^2+z^3+z^5$
$\qquad +z^3+z^4+z^6)$

$= z^4\underbrace{(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)}_{0}+2$

$\therefore\ w\cdot\overline{w}=\underline{2}$

$w,\ \overline{w}$ を解にもつ2次方程式は

$c^2+c+2=0$

$\therefore\ c=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

つまり

$\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi=\underline{-\frac{1}{2}}$

$\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{4}{7}\pi+\sin\frac{8}{7}\pi=\underline{\frac{\sqrt{7}}{2}}$

(b)

$\alpha+\beta$

$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$\therefore\ |\alpha+\beta|=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\times\sqrt{2}$

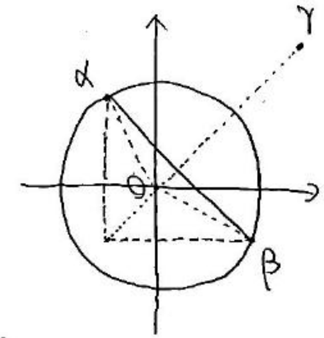
$=\underline{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$

$\alpha-\beta$

$=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\times\sqrt{2}$

$=\underline{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$



直線αβは傾きが−1より
直線Oγは傾きが1なので
$\gamma=d+di$ とおける。
γとβの距離が $|\alpha-\beta|$ なので

$\left(d-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(d+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2d^2-(\sqrt{3}-1)d+1=2+\frac{2\sqrt{12}}{4}$

$\Leftrightarrow 2d^2+(1-\sqrt{3})d-1-\sqrt{3}=0$

$d=\dfrac{-(1-\sqrt{3})\pm\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+8+8\sqrt{3}}}{4}$

$=\dfrac{-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{4}$

$=\dfrac{-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{3}\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}$

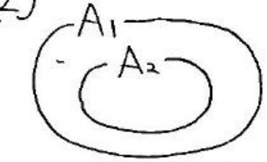
$=\dfrac{-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}$

$d>0$ より

$d=\dfrac{-1+\sqrt{3}+3+\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\therefore\ \gamma=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$

(2)



$x\in A_1$ であることは $x\in A_2$ であることの
必要条件 … $\underline{(a)}$

どの2つのケタの和も9にならない
事象をSとする。

$n(A)$

$=8\cdot7\cdot6\cdot5+8\cdot7\cdot6+8\cdot7=56\cdot37$
$=\underline{2072}$

$n(A_1)$

$=n(4\text{ケタ}\cap S)$
$\quad +n(3\text{ケタ}\cap S)$
$\quad +n(2\text{ケタ}\cap S)$

$=8\cdot6\cdot4\cdot2+8\cdot6\cdot4+8\cdot6$

$=48(8+4+1)=\underline{624}$

$n(A_2)=8\cdot6\cdot4+8\cdot6=\underline{240}$

$n(2ケタ)=8\cdot7=56$

$n(3ケタ)=8\cdot7\cdot6=336$

$1???\cdots\cdots 7\cdot6\cdot5=210$

ここまでで602コ.

1876 … 602番目
1875 … 601 ⋮
1874 … 600番目

(3) $\begin{cases} x=\sin 8\theta=0 \\ y=\sin 6\theta=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 8\theta=k\pi \\ 6\theta=\frac{\pi}{2}+2l\pi \end{cases} \quad (k, l\in\mathbb{Z})$

$\downarrow$

$3k\pi=2\pi+8l\pi$

$\Leftrightarrow 3k-8l=2$

$\downarrow$

$\begin{cases} k=8m+6 \\ l=3m+2 \end{cases} \quad (m\in\mathbb{Z})$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $m=0,\ k=6$

$\theta=\frac{6}{8}\pi=\underline{\frac{3}{4}\pi}$

また

$8\theta=k\pi$

$\Leftrightarrow \theta=\frac{k}{8}\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\downarrow$

$6\theta=\frac{3k}{4}\pi$

6θが第3, 4象限にあるのは

$k=2, 5, 7$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi$

$\theta=\frac{\pi}{4}$のとき $y=\sin 6\theta=-1$ と

なるので Bは小さい順に

$\theta=\underline{\frac{5}{8}\pi}, \underline{\frac{7}{8}\pi}$

このとき $y=\sin 6\theta=\underline{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$

$\int_{\beta}^{1} x\,dy$

$=\int_{\frac{7}{8}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta$

$=6\int_{\frac{7}{8}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \sin 8\theta\cos 6\theta\,d\theta$

$=6\int_{\frac{7}{8}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(8\theta+6\theta)+\sin(8\theta-6\theta)\right]d\theta$

$=\int_{\frac{7}{8}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} 3(\sin 2\theta+\sin 14\theta)\,d\theta$

$=3\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{14}\cos 14\theta\right]_{\frac{7}{8}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}$

$=3\left(\frac{1}{2}\underbrace{\cos\frac{7}{4}\pi}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{14}\underbrace{\cos\frac{49}{4}\pi}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{14}\right)=\frac{6\sqrt{2}}{7}$

$(面積)=\underline{\frac{12\sqrt{2}}{7}}$

$\boxed{\text{II}}$

(1) $x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+3$

$x_2=\frac{3}{4}\cdot3+3=\underline{\frac{21}{4}}$

$x_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{21}{4}+3$

$=\frac{63+48}{16}=\underline{\frac{111}{16}}$

$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(-9\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+12\right)$

$=\underline{12}$

(2) $x_{n+1}=\frac{3}{4}[x_n]+3$

$x_3=\frac{3}{4}\underbrace{[x_2]}_{5}+3=\underline{\frac{27}{4}}$

$x_4=\frac{3}{4}\cdot6+3=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$

$x_5=\frac{3}{4}\cdot7+3=\frac{33}{4}$

$x_6=\frac{3}{4}\cdot8+3=9$

$x_7=\frac{3}{4}\cdot9+3=\frac{39}{4}$

$x_8=\frac{3}{4}\cdot9+3=\frac{39}{4}$

$\vdots$

$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\underline{\frac{39}{4}}$

(3)

$x_{n+1}=\frac{3x_n}{1+x_n}$

$\downarrow$

$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x_n}+\frac{1}{3}$

$\downarrow$

$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}\right)$

$\downarrow$

$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{n-2}}+1\right)$

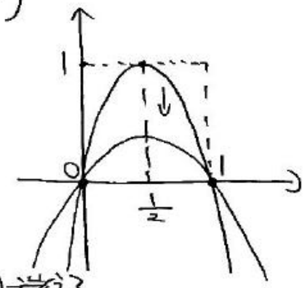
$\frac{1}{x_5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{27}+1\right)=\frac{14}{27}$

$\frac{1}{x_9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^7}+1\right)=\frac{1094}{2187}$

$\therefore x_5=\underline{\frac{27}{14}} \quad x_9=\underline{\frac{2187}{1094}}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{2}$

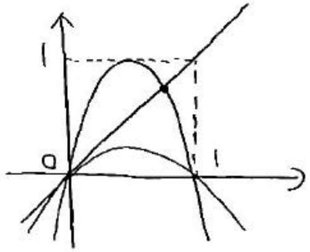
(4)



図で考える．

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} \leqq 1$

$\therefore \underline{0 \leqq a \leqq 4}$



$f'(x) = a(1-x) - ax$

$\quad = a(1-2x)$

$f'(0) = a$ が $y = x$ の傾きである

1より大きければよい．

$\therefore \underline{1 < a \leqq 4}$

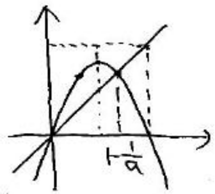
交点は

$x = ax(1-x)$

$\Leftrightarrow x(ax+1-a) = 0$

$\therefore x_1 = \frac{a-1}{a} = \underline{1 - \frac{1}{a}}$

$x_1 < x_2,\ x_3 = x_1$ となるには



$0 < x_1 < 1 - \frac{1}{a}$

また

$x_2 = ax_1(1-x_1)$

$x_3 = ax_2(1-x_2)$

$\Leftrightarrow x_1 = a \cdot ax_1(1-x_1)\{1 - ax_1(1-x_1)\}$

$\Leftrightarrow 1 = a^2(1-x_1)(ax_1^2 - ax_1 + 1)$

$\Leftrightarrow 1 = a^2(-ax_1^3 + 2ax_1^2 - ax_1 - x_1 + 1)$

$\Leftrightarrow a^3x_1^3 - 2a^3x_1^2 + a^2(a+1)x_1 + 1 - a^2 = 0$

$x_1 = 1 - \frac{1}{a}$ を解にもつ

$\Leftrightarrow (ax_1 + 1 - a)\{a^2x_1^2 - (a^2+a)x_1 + (1+a)\} = 0$

今回は $x_1 \neq 1 - \frac{1}{a}$ より

$x_1 = \frac{a^2+a \pm \sqrt{(a^2+a)^2 - 4a^2(a+1)}}{2a^2}$

$= \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$

$a - 3 \geqq 0 \quad \therefore a \geqq 3$ である必要がある．

$3 < a \leqq 4$ のとき x_1 は

$x_1 = \underline{\frac{a+1-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}}$

（$a = 3$ のとき $1 - \frac{1}{a} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$ となる）

$\boxed{\text{III}}$

(1)

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
 & 1 & 1 & 3 & 1 \\
105 & 126 & 231 & 819 & 1050 \\
 & 105 & 126 & 693 & 819 \\ \hline
 & 21 & 105 & 126 & 231
\end{array}$$

$\gcd(1050, 819) = \underline{21}$

(2)

商を q として

$b = aq + r$

とおける．

$r = b - aq$

として $a = ck,\ b = cl\ (k, l \in \mathbb{Z})$

とすると

$r = c(l - kq)$

となり c は r の約数でもある．

(3)

(2)での $c = \gcd(a, b)$ とする．

c は r の約数より，c は a と r の公約数なので c は $d = \gcd(a, r)$ の約数 $\cdots$ ①

また

$b = aq + r$

$\quad = ds \quad (s \in \mathbb{Z})$

とできるので d は b の約数．

つまり d は a, b の公約数より

d は $c = \gcd(a, b)$ の約数 $\cdots$ ②

①②より $c = d$．

$\therefore \gcd(b, a) = \gcd(a, r) \cdots$ ③

$x_1 = b,\ x_2 = a$ とし x_1 を x_2 で割った余りを x_3，x_2 を x_3 で割った余りを x_4，同様に繰り返し x_n を x_{n-1} で割った余りを x_{n+1} とする．③より

$\gcd(x_1, x_2) = \gcd(x_2, x_3)$

$\quad = \gcd(x_3, x_4)$

$\quad \vdots$

$\quad = \gcd(x_N, 0) = x_N$

0になる前の数字を x_N とすると

$x_N = M$．

ここで x_n $(n=1,2,\cdots,N)$ が

$x_n = sa + tb$ $(s, t \in \mathbb{Z})$ で

表せることを数学的帰納法で

示す、

(i) $n=1,2$ のとき明らかに

成立.

(ii) $n=k, k+1$ で成り立つとすると

$x_k = \alpha a + \beta b$

$x_{k+1} = \gamma a + \delta b$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z})$

で表せる.

x_k を x_{k+1} で割った商を Q とすると

$x_k = x_{k+1}Q + x_{k+2}$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow x_{k+2} &= x_k - x_{k+1}Q \\ &= \alpha a + \beta b \\ &\quad - (\gamma a + \delta b)Q \\ &= (\alpha - \gamma Q)a + (\beta - \delta Q)b\end{aligned}$$

となり $n=k+2$ でも成立.

これにより $x_n = sa + tb$ $(s, t \in \mathbb{Z})$

で表せることが言えたので

$x_N = m = sa + tb$

をある整数 s, t で表せる、