横浜国大 理工 2018

1.

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \left[-\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2$$

(2)

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\,dt = a$ とおく.

与式の両辺 $\cos^2 x$ で割ると

$$f(x) = \frac{\pi}{\cos^2 x} - \frac{a}{\log 2}\cdot\frac{x}{\cos^2 x}$$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$ で積分すると

$$a = \left[\pi\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{a}{\log 2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2\right)$$
$$= \sqrt{3}\pi - \frac{\sqrt{3}\pi a}{3\log 2} + a$$

$\therefore a = 3\log 2$

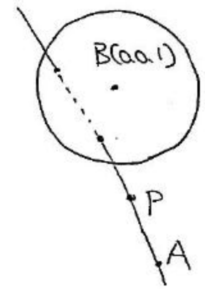
$$f(x) = \frac{\pi}{\cos^2 x} - \frac{3x}{\cos^2 x}$$

2.

(1)

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$$
$$= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AP}$$
$$= \begin{pmatrix} 2+t(a-2) \\ tb \\ -1+t \end{pmatrix}$$

(2)

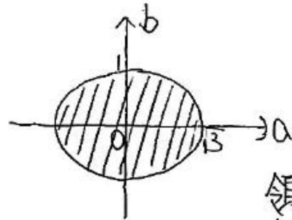


直線AP：$\begin{cases} x = 2+(a-2)t \\ y = bt \\ z = -1+t \end{cases}$

球面S：$x^2+y^2+(z-1)^2 = 2$

↓代入

$$(a-2)^2t^2 + 4(a-2)t + 4 + b^2t^2 + t^2 - 4t + 4 = 2$$
$$\Leftrightarrow (a^2-4a+b^2+5)t^2 + (4a-12)t + 6 = 0$$
$$\frac{D}{4} = (2a-6)^2 - 6(a^2-4a+b^2+5)$$
$$= -2a^2 - 6b^2 + 6 \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{3} + b^2 \leqq 1$$



領域は斜線部分、境界線含む.

(3)

$$T: (-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow y^2 + (z-1)^2 = 1$$

直線APで $x = -1$ のとき

$$-1 = 2 + (a-2)t$$

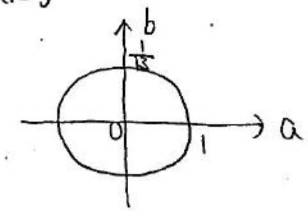
$a=2$ のとき不適. $a \neq 2$ のとき

$$t = \frac{-3}{a-2} = \frac{3}{2-a}$$

$$y = \frac{3b}{2-a},\quad z = \frac{3}{2-a} - 1 = \frac{1+a}{2-a}$$

これをTに代入

$$\left(\frac{3b}{2-a}\right)^2 + \left(\frac{1+a}{2-a} - \frac{2-a}{2-a}\right)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow 9b^2 + (2a-1)^2 = (2-a)^2$$
$$\Leftrightarrow 3a^2 + 9b^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{b^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \quad (a \neq 2 \text{ を満たす})$$



3.

(1) $|w-1| = 1$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z+2\alpha}{z+\alpha} - 1\right| = 1$$
$$\Leftrightarrow |z+2\alpha-z-\alpha| = |z+\alpha|$$
$$\Leftrightarrow |\alpha| = |z+\alpha|$$

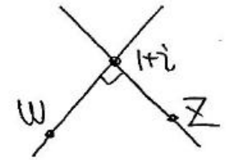
$\therefore \alpha = -1$

(2)

$$w = \frac{z-2}{z-1} = z$$
$$\Leftrightarrow z-2 = z^2-z$$
$$\Leftrightarrow 0 = z^2-2z+2$$

$\therefore z = 1 \pm i$

(3)



$$\frac{w-1-i}{z-1-i} \quad z = x+yi$$
$$= \frac{w-1-i}{(x-1)+(y-1)i}$$

$$= \frac{(u-1-i)(x-1-(y-1)i)}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

これが純虚数であればいいが
そのためには分子が純虚数
であればいい.

(分子)

$$= \left(\frac{x-2+yi}{x-1+yi}-1-i\right)\{(x-1)-(y-1)i\}$$

$$= \left(\frac{-1}{x-1+yi}-i\right)\{(x-1)-(y-1)i\}$$

$$= \left(-\frac{x-1-yi}{(x-1)^2+y^2}-i\right)\{(x-1)-(y-1)i\}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2+y^2}\left(x-1-yi+((x-1)^2+y^2)i\right)\{(x-1)-(y-1)i\}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2+y^2}\{x-1+((x-1)^2+y^2-y)i\}\{(x-1)-(y-1)i\}$$

つまりこれが純虚数になるには

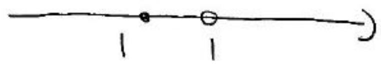
$$(x-1)^2+\{(x-1)^2+y^2-y\}(y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2y+y(y-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \{(x-1)^2+(y-1)^2\}y=0$$

$z \neq 1+i$ より $y=0$

$\therefore z=x \quad (z\neq 1)$



zは実軸上で1を除く.

4.

(1) $3b_{n+1}=5a_n+b_n$

$b_1=1$より左辺が3の倍数なので
$a_1=1,\ b_2=2$. このように
同様に繰り返すと

$b_1=1,\ a_1=1$
$b_2=2,\ a_2=2$
$b_3=4,\ a_3=1$
$b_4=3,\ a_4=0$
$b_5=1,\ a_5=1$
$b_6=2,\ a_6=2$
⋮

nが周期4で繰り返すので

$$(a_n,b_n)=\begin{cases}(1,1) & (n\equiv 1 \pmod 4)\\ (2,2) & (n\equiv 2 \pmod 4)\\ (1,4) & (n\equiv 3 \pmod 4)\\ (0,3) & (n\equiv 0 \pmod 4)\end{cases}$$

(2)

(i) $n=1$のとき $0<b_n<5$は成立.

(ii) $n=k$のとき与式が成り立つと仮定する.

$$0<b_k<5$$

$$\Leftrightarrow 5a_k < cb_{k+1} < 5(a_k+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5a_k}{c} < b_{k+1} < \frac{5}{c}(a_k+1)$$

$$< \frac{5}{c}(c-1+1)$$

$$< 5$$

$\therefore 0<b_{k+1}<5$

つまり$n=k+1$のときも成立.

(i)(ii)よりすべての自然数nにおいて$0<b_n<5$.

(3)

$(5l+4)b_{n+1}=5a_n+b_n$

$b_1=1$より

$(5l+4)b_2=5a_1+1$

$0<b_2<5$をふまえると

$b_2=4,\ a_1=4l+3$.

次に

$(5l+4)b_3=5a_2+4$

$0<b_3<5$をふまえると

$b_3=1,\ a_2=l$.

次に

$(5l+4)b_4=5a_3+1$

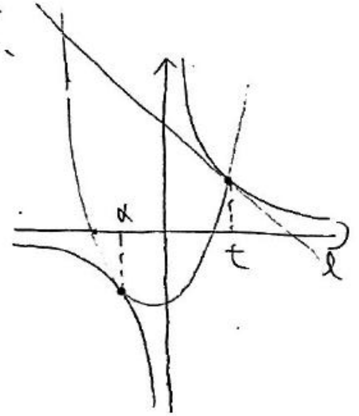
同様に

$b_4=4,\ a_3=4l+3$

以後同様に繰り返していくと

$$(a_n,b_n)=\begin{cases}(4l+3,1) & (n\equiv 1 \pmod 2)\\ (l,4) & (n\equiv 0 \pmod 2)\end{cases}$$

5.



(1)

$y = -\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}$

$= -\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$

(2)

第3象限で $x=\alpha$ で接するとする.

C_1 と C_2 連立して

$x^2+ax+b=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx-1=0$

解と係数の関係より

$$\begin{cases} t+\alpha+\alpha=-a \\ t\alpha+\alpha^2+t\alpha=b \\ t\alpha^2=1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{t}} \quad (\alpha<0)$

$a=-t-2\alpha$

$= -t+\frac{2}{\sqrt{t}}$ //

$b=2t\alpha+\alpha^2$

$= -2\sqrt{t}+\frac{1}{t}$ //

(3)

C_2 と ℓ 連立

$x^2+\left(-t+\frac{2}{\sqrt{t}}\right)x-2\sqrt{t}+\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$

$\Leftrightarrow x^2+\left(-t+\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t^2}\right)x-2\sqrt{t}-\frac{1}{t}=0$

$\Leftrightarrow (x-t)\left\{x-\left(\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t^2}\right)\right\}=0$

S

$= \int_{\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t^2}}^{t} (\ell - C_2)\,dx$

$= \frac{1}{6}\left\{t-\left(\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t^2}\right)\right\}^3$

$= \frac{1}{6}\left(t+\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t^2}\right)^3$ //

(4)

$s(t)=t+\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t^2}$ とおく

$s'(t)=1-t^{-\frac{3}{2}}-2t^{-3}$

$= \frac{t^3-t\sqrt{t}-2}{t^3}$

$= \frac{(t\sqrt{t}+1)(t\sqrt{t}-2)}{t^3}$

$s'(t)=0 \Leftrightarrow t\sqrt{t}=2$.

$\Leftrightarrow t=2^{\frac{2}{3}}$

t	$0 \cdots 2^{\frac{2}{3}} \cdots$
$s'(t)$	$-\ 0\ +$
$s(t)$	$\searrow \quad \nearrow$

$t=2^{\frac{2}{3}}$ のとき

$s(t)$ と S が最小.

$\min S = \frac{1}{6}\left(2^{\frac{2}{3}}+2\cdot 2^{-\frac{1}{3}}+2^{-\frac{4}{3}}\right)^3$

$= \frac{1}{6}\left(2^{\frac{5}{3}}+2^{-\frac{4}{3}}\right)^3$

$= \frac{1}{6}\left(2^{-\frac{4}{3}}\right)^3\left(2^3+1\right)^3$

$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}\cdot 9^3$

$= \frac{243}{32}$ //