2018 早稲田 理工

[I]

(1) $x^2+qx+r=0$ が虚数解をもてばいいので

$D=q^2-4r<0$

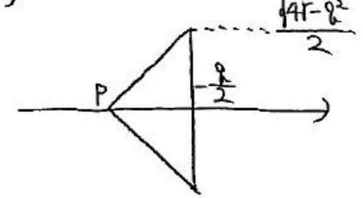
$\Leftrightarrow \underline{q^2<4r}$ //

このとき

$x=\dfrac{-q\pm\sqrt{4r-q^2}\,i}{2}$

より $\underline{p \neq -\dfrac{q}{2}}$ // でないと三角形にならない。

(2)



$S=\left|-\dfrac{q}{2}-p\right|\times\dfrac{\sqrt{4r-q^2}}{2}$

$=\dfrac{1}{4}|q+2p|\sqrt{4r-q^2}$

(3) Qは実軸上にあるので γ とすると

$|\gamma-p|=\sqrt{\left(\gamma+\dfrac{q}{2}\right)^2+\dfrac{4r-q^2}{4}}$

2乗すて

$\gamma^2-2p\gamma+p^2=\gamma^2+q\gamma+r$

$\Leftrightarrow p^2-r=\gamma(2p+q)$

$\Leftrightarrow \underline{\gamma=\dfrac{p^2-r}{2p+q}}$ //

$R=\left|\dfrac{p^2-r}{2p+q}-p\right|$

$=\left|\dfrac{-p^2-r-pq}{2p+q}\right|=\underline{\left|\dfrac{p^2+pq+r}{2p+q}\right|}$ //

[II]

(1)
$$\begin{cases} y=x+1 \cdots ① \\ y=-3x+5 \cdots ② \\ y=-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{4}(x+1)^2-1 \cdots ③ \end{cases}$$

2直線の交点 $(1,2)$

①と曲線の交点

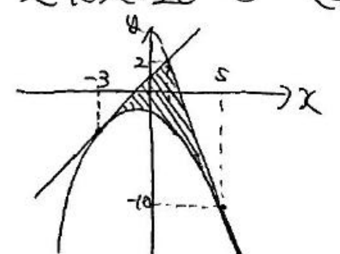
$x^2+2x+4(x+1)+5=0$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9=0 \quad (-3,-2)$

②と曲線の交点

$x^2+2x-12x+20+5=0$

$\Leftrightarrow x^2-10x+25=0 \quad (5,-10)$



求める面積は

$\int_{-3}^{1}\{①-③\}dx+\int_{1}^{5}\{②-③\}dx$

$=\int_{-3}^{1}\dfrac{1}{4}(x+3)^2dx+\int_{1}^{5}\dfrac{1}{4}(x-5)^2dx$

$=\left[\dfrac{1}{12}(x+3)^3\right]_{-3}^{1}+\left[\dfrac{1}{12}(x-5)^3\right]_{1}^{5}$

$=\underline{\dfrac{32}{3}}$ //

(2)

$x=4$ のとき ②: $y=-7$, ③: $y=-\dfrac{29}{4}$ なし

$x=3$: ②: $y=-4$, ③: $y=-5$ なし

$x=2$: ②: $y=-1$, ③: $y=-\dfrac{13}{4}$ 2コ

$x=1$: ①②: $y=2$, ③: $y=-2$ 3コ

$x=0$: ①: $y=1$, ③: $y=-\dfrac{5}{4}$ 2コ

$x=-1$: ①: $y=0$, ③: $y=-1$ なし

$x=-2$: なし

合計 $\underline{7}$ 個 //

[IV]

(1) $\sqrt[3]{p}$ が有理数だと仮定する。互いに素な自然数 q, r を用いて

$\sqrt[3]{p}=\dfrac{r}{q}$

と表せる。3乗して

$p=\dfrac{r^3}{q^3}$

だが、p は素数で q と r は互いに素より $q=1$ となる。$p=r^3$ となるが p は素数なので不適。

よって $\sqrt[3]{p}$ は無理数である。

(2)

$a(\sqrt[3]{p})^2+b\sqrt[3]{p}+c=0 \leftarrow ①$

$\times\sqrt[3]{p}$

$ap+b(\sqrt[3]{p})^2+c\sqrt[3]{p}=0 \leftarrow ②$

(3) 示したい式に $(\sqrt[3]{p})^2$ がないことに注目。

$ab(\sqrt[3]{p})^2+b^2\sqrt[3]{p}+bc=0 \cdots ①\times b$

$-)\ a^2p+ab(\sqrt[3]{p})^2+ac\sqrt[3]{p}=0 \cdots ②\times a$

$bc-a^2p+(b^2-ac)\sqrt[3]{p}=0$

(4) (1)より $\sqrt[3]{p}$ は無理数なので

$bc-a^2p=0,\ b^2-ac=0$

$\Leftrightarrow abc=a^3p,\ b^3=abc$

$\therefore\ a^3p=b^3$

ここで $a\neq 0$ とすると

$$p=\frac{b^3}{a^3}\Leftrightarrow \sqrt[3]{p}=\frac{b}{a}$$

しかし $\sqrt[3]{p}$ は無理数なので矛盾.

よって $a=b=0$. つまり $c=0$ より

$a=b=c=0$.

[IV]

(1)

$f(x)=e^x(\cos x+\sin x)$

$f'(x)=e^x(\cos x+\sin x)$
$\quad +e^x(-\sin x+\cos x)$
$\quad =\underline{2e^x\cos x}$ //

(2)(i)

$g'(x)=-\pi e^{-\pi x}\sin\pi x$
$\quad +\pi e^{-\pi x}\cos\pi x$
$\quad =\pi e^{-\pi x}(\cos\pi x-\sin\pi x)$
$\quad =\sqrt{2}\pi e^{-\pi x}\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$

極大は $g'(x)=0$ で $g'(x)$ が正から負

$\Leftrightarrow \pi x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\Leftrightarrow\ x=\frac{1}{4}+2k$ (kは整数)

極大値 $g\left(\frac{1}{4}+2k\right)=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}}$ (kは整数) //

極小は $g'(x)=0$ で $g'(x)$ が負から正

$\Leftrightarrow \pi x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi+2l\pi$

$\Leftrightarrow\ x=\frac{5}{4}+2l$ (lは整数)

極小値 $g\left(\frac{5}{4}+2l\right)=\underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi-2l\pi}}$ (lは整数) //

(ii)

V_n

$=\int_{n-1}^{n}\pi e^{-2\pi x}\sin^2\pi x\,dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_{n-1}^{n}\left(e^{-2\pi x}-e^{-2\pi x}\cos 2\pi x\right)dx$

$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2\pi}e^{-2\pi x}\right]_{n-1}^{n}$
$\quad -\frac{\pi}{2}\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}\cos(-2\pi x)\,dx$

$\downarrow\ -2\pi x=t,\ dx=-\frac{1}{2\pi}dt$

$=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2\pi}e^{-2\pi n}+\frac{1}{2\pi}e^{-2\pi(n-1)}\right)$
$\quad -\frac{\pi}{2}\int_{-2\pi(n-1)}^{-2\pi n}e^{t}\cos t\left(-\frac{1}{2\pi}\right)dt$

$=-\frac{1}{4}e^{-2\pi n}+\frac{1}{4}e^{-2\pi(n-1)}$
$\quad +\frac{1}{4}\left[\frac{e^t}{2}(\cos t+\sin t)\right]_{-2\pi(n-1)}^{-2\pi n}$

$=-\frac{1}{4}e^{-2\pi n}+\frac{1}{4}e^{-2\pi(n-1)}$
$\quad +\frac{1}{8}e^{-2\pi n}-\frac{1}{8}e^{-2\pi(n-1)}$

$=-\frac{1}{8}e^{-2\pi n}+\frac{1}{8}e^{-2\pi n}\cdot e^{2\pi}$

$=\underline{\frac{1}{8}e^{-2\pi n}(e^{2\pi}-1)}$ //

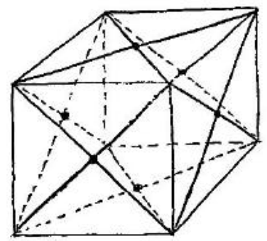
(iii)

$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$

$=\frac{\frac{1}{8}(1-e^{-2\pi})}{1-e^{-2\pi}}=\underline{\frac{1}{8}}$ //

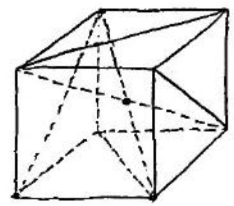
[V]

(1)



各面の対角線の交点がZの頂点となるので正八面体になる.

(2)



共通部分は立方体の中心である点のみ. Zは線分 A_1A_7 と線分 A_4A_6 の交点.

(3)

p

$=P$(正方形が向かいあわせ)

$+P($  のように向かいあわせ)

$=\left(\frac{3}{{}_8C_4}+\frac{4}{{}_8C_4}\right)\cdot\underbrace{2}_{\boxed{\text{XとYが逆の時}}}=\frac{7\cdot 2}{70}=\underline{\frac{1}{5}}$

q_0

$=P$((2)のように接する)

$=\frac{1}{{}_6C_4}\cdot\underbrace{4}_{\boxed{\text{1つの面から4つ}}}\cdot\underbrace{6}_{\boxed{\text{立方体の面の数}}}=\underline{\frac{12}{35}}$ //

q_1

$= P($  のように長方形がクロス$)$

$= \dfrac{3 \times 2}{{}_8C_4} = \underline{\dfrac{3}{35}}_{\#}$

$q_2 = \underline{0}_{\#}$ $\boxed{\text{XとYが同一平面上にあることはない}}$

$\therefore q_3 = 1 - P - q_0 - q_1 - q_2$

$= 1 - \dfrac{1}{5} - \dfrac{12}{35} - \dfrac{3}{35} - 0$

$= \underline{\dfrac{13}{35}}_{\#}$