2018 東京医科大

1

$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{PB_1}$

$=(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1})\cdot(\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OP})$

$=5-23-3+14=\underline{-7}$

$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA_1}+b\overrightarrow{OA_2}$ とおく.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB_1}$

$=3a+5b=22$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB_2}$

$=4a+7b=35$

$\therefore a=-21,\ b=17$

$\overrightarrow{OP}=c\overrightarrow{OB_1}+d\overrightarrow{OB_2}$ とおく.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA_1}$

$=3c+4d=14$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA_2}$

$=5c+7d=23$

$\therefore c=6,\ d=-1$

$|\overrightarrow{OP}|^2$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}$

$=(-21\overrightarrow{OA_1}+17\overrightarrow{OA_2})\cdot(6\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OB_2})$

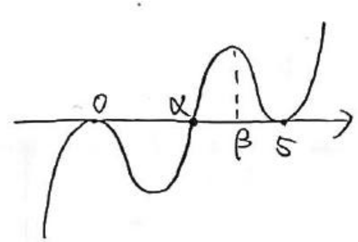
$=-126\cdot3+21\cdot4$
$\quad+102\cdot5-17\cdot7$

$=-378+84+510-119$

$=97 \qquad \therefore |\overrightarrow{OP}|=\underline{\sqrt{97}}$

2

(1) $x=0$ において極大値 0
$x=5$ 〃 極小値 0 より
$f(x)=0$ は $x=0,5$ で重解.
$f(x)=x^2(x-5)^2(x-\alpha)$ とおける.



図より $0<\alpha<5$.

$f(x)$

$=(x^4-10x^3+25x^2)(x-\alpha)$

$=x^5-10x^4+25x^3-\alpha x^4+10\alpha x^3$
$\qquad -25\alpha x^2$

$\therefore b=25+10\alpha$

$\therefore \underline{25<b<75}$

$f'(x)$

$=2x(x-5)^2(x-\alpha)$
$+x^2\cdot2(x-5)(x-\alpha)$
$+x^2(x-5)^2$

$=x(x-5)\{2(x-5)(x-\alpha)+2x(x-\alpha)$
$\qquad +x(x-5)\}$

$=x(x-5)\{5x^2-(4\alpha+15)x+10\alpha\}$

$5x^2-(4\alpha+15)x+10\alpha=0$ の大きい方の解を β とおく

$5\beta^2-(4\alpha+15)\beta+10\alpha=0$

$\Leftrightarrow (10-4\beta)\alpha=-5\beta^2+15\beta$

$\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{5\beta^2-15\beta}{4\beta-10}$

$\downarrow\ 0<\alpha<5$

$\underbrace{0<\dfrac{5\beta^2-15\beta}{4\beta-10}}_{①}\ \underbrace{\quad<5}_{②}$

① 解くと $\beta>0$ より
$\beta>3$

② 解くと
$5\beta^2-15\beta<20\beta-50$
$\Leftrightarrow \beta^2-7\beta+10<0$
$\therefore \dfrac{5}{2}<\beta<5$

以上より $3<\beta<5$.

M

$=\beta^2(\beta-5)^2(\beta-\alpha)$

$=\beta^2(\beta-5)^2\dfrac{4\beta^2-10\beta-5\beta^2+15\beta}{4\beta-10}$

$=\dfrac{\beta^3(5-\beta)^3}{4\beta-10} \qquad (3<\beta<5)$

$\downarrow\ \beta-\dfrac{5}{2}=t$

$=\dfrac{(t+\frac{5}{2})^3(\frac{5}{2}-t)^3}{4t}$

$=\dfrac{(5+2t)^3(5-2t)^3}{32t}$

$=\dfrac{(25-4t^2)^3}{32t} \qquad \left(\dfrac{1}{2}<t<\dfrac{5}{2}\right)$

$\dfrac{dM}{dt}$

$=\dfrac{3(25-4t^2)^2(-8t)32t-(25-4t^2)^3 32}{32^2t^2}$

$$= \frac{32(25-4t^2)^2\{-24t^2-(25-4t^2)\}}{32^2t^2}$$

$$= \frac{32(25-4t^2)^2(-20t^2-25)}{32^2t^2} < 0$$

Mは単調減少、つまり $\frac{1}{2} < t < \frac{5}{2}$

より $\underline{0 < M < 108}$ //

(2)

$f(x) = (ax)^{-\frac{(bx)^c}{3}}$

$\Leftrightarrow \log f(x) = -\frac{(bx)^c}{3}\log(ax)$

xで微分

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\Big\{\underbrace{\frac{(bx)^c}{3}}_{g(x)}\Big\}'\log ax - \frac{(bx)^c}{3}\cdot\frac{a}{ax}$$

$\log g(x) = \log\frac{(bx)^c}{3}$

$= c\log(bx) - \log 3$

xで微分

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = c\log(bx) + c$$

よって

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -g(x)\{c\log(bx)+c\}\log ax - g(x)\frac{1}{x}$$

$\downarrow x=1$

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = -g(1)\{-c+c\}\cdot\log a - g(1)$$

$$= -\frac{b^c}{3}$$

$$= -\frac{1}{3e^{\log 2^{-1}}}$$

$$= -\frac{1}{3\cdot 2^{-1}} = -\frac{2}{3}$$

$\therefore f'(1) = -\frac{2}{3}f(1)$

$= -\frac{2}{3}a^{-g(1)}$

$= -\frac{2}{3}\cdot 8^{-\frac{2}{3}}$

$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{-1}{6}$

3

(1)

$a_2 = a_1\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$

$a_3 = a_2\cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{4}$

$a_4 = a_3\cos\frac{9}{3}\pi = \frac{1}{4}$

$a_5 = a_4\cos\frac{16}{3}\pi = -\frac{1}{8}$

$a_6 = a_5\cos\frac{25}{3}\pi = \underline{\frac{-1}{16}}$ //

$$\sum_{n=1}^{6} a_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{16+8-2-1}{16} = \underline{\frac{21}{16}}$$ //

(2)

$\cos\frac{(6k)^2\pi}{3} = 1$

$\cos\frac{(6k+1)^2\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{(6k+2)^2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{(6k+3)^2\pi}{3} = \cos\pi = -1$

$\cos\frac{(6k+4)^2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{(6k+5)^2\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

a_{70}

$$= a_1\prod_{k=1}^{69}\cos\frac{k^2\pi}{3}$$

$$= \underset{1}{a_1}\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\right\}^{11}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)$$

$\log_2|a_{70}|$

$= \log_2 2^{-44}\cdot 2^{-2}$

$= \log_2 2^{-46} = \underline{-46}$ //

$a_1 = 1,\ a_7 = -\frac{1}{16}$ より

a_{6k+1} は公比が $-\frac{1}{16}$ の等比数列。

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{6k+1} = \frac{-\frac{1}{16}}{1-\left(-\frac{1}{16}\right)} = \underline{\frac{-1}{17}}$$ //

(3)

$a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ がそれぞれ

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ の $-\frac{1}{16}$ 倍

つまり

$$\sum_{n=7}^{12} a_n = \left\{\sum_{n=1}^{6} a_n\right\}\times\left(-\frac{1}{16}\right)$$

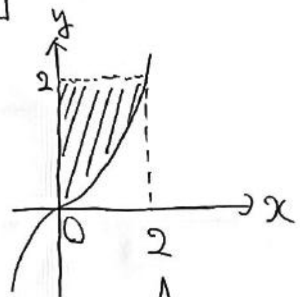
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は初項が $\frac{21}{16}$ 公比 $-\frac{1}{16}$

の無限等比級数となるので

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{21}{16}}{1-\left(-\frac{1}{16}\right)} = \underline{\frac{21}{17}}$$ //

4

(1)



$\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{2}x=2$

$\Leftrightarrow x^3+4x-16=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+8)=0$

(Fの面積)

$=\int_0^2 x\,dy$

$=\int_0^2 x\frac{dy}{dx}dx \quad \left(\frac{dy}{dx}=\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{2}\right)$

$=\left[\frac{3}{32}x^4+\frac{1}{4}x^2\right]_0^2$

$=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ //

(2)

$g^{-1}(2)=\alpha$ とおく.

$2=g(\alpha)=f'(\alpha)^2$

$\therefore f'(\alpha)=\sqrt{2}$ ($\because f'(x)>0$)

$\therefore \alpha=f(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ //

(3)

(体積)

$=\int_0^2 x^2\pi\,dy$

$=\pi\int_0^2\left(\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{2}x^2\right)dx$

$=\pi\left[\frac{3}{40}x^5+\frac{1}{6}x^3\right]_0^2$

$=\pi\left(\frac{3}{40}\cdot 32+\frac{1}{6}\cdot 8\right)$

$=\pi\left(\frac{3}{5}\cdot 4+\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{56}{15}\pi$ //

5

yに−yを代入しても成立つので このグラフはx軸に関して対称である. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと ($0\le\theta<2\pi$)

$(x^2+y^2)^2=x^3-3xy^2$

$\Leftrightarrow r^4=r^3\cos^3\theta-3r^3\cos\theta\sin^2\theta$

$\Leftrightarrow r=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\therefore r=\cos3\theta$

x軸対称であることをふまえて書くと