2018 東京大 理系

第1問

$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}+\cos x$

$f'(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x-\sin^3 x}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{\sin x\cos^2 x-x\cos x}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{\cos x(\sin 2x-2x)}{2\sin^2 x}$

$g(x)=\sin 2x-2x$ とおく

$g'(x)=2\cos 2x-2\leqq 0$

$g(x)$は単調減少, $g(0)=0$

より $g(x)\leqq 0$.

x	$0\cdots\frac{\pi}{2}\cdots\pi$
$f'(x)$	$\times\ -\ 0\ +\ \times$
$f(x)$	$\times\ \searrow\ \frac{\pi}{2}\ \nearrow\ \times$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=1+1=2.$

$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}f(x)=\infty$

第2問

(1)

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$=\dfrac{{}_{2n+1}C_n}{{}_{2n-1}C_{n-1}}\cdot\dfrac{(n-1)!}{n!}$

$=\dfrac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}\cdot\dfrac{(n-1)!n!}{(2n-1)!}\cdot\dfrac{1}{n}$

$=\dfrac{(2n+1)2n}{(n+1)n\cdot n}=\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}$

$n(n+1)$が偶数なので

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2n+1}{\frac{n(n+1)}{2}}$ として $p_n=\frac{1}{2}n(n+1)$, $q_n=2n+1$

(2)

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\geqq 1$

$\Leftrightarrow 4n+2\geqq n^2+n$

$\Leftrightarrow 0\geqq n^2-3n-2$

これより

$n=2,3$のとき

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}>1\Leftrightarrow a_n>a_{n-1}$

$n\geqq 4$のとき

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1\Leftrightarrow a_n<a_{n-1}$

なので

$a_1<a_2<a_3>a_4>a_5>\cdots$

$a_1=3$, $a_2=\dfrac{{}_5C_2}{2!}=5$,

$a_3=\dfrac{{}_7C_3}{3!}=\dfrac{35}{6}$

$a_4=\dfrac{2\cdot 9}{4\cdot 5}a_3=\dfrac{21}{4}$

$a_5=\dfrac{2\cdot 11}{5\cdot 6}a_4=\dfrac{77}{20}$

$a_6=\dfrac{2\cdot 13}{6\cdot 7}a_5=\dfrac{143}{60}$

$a_7=\dfrac{2\cdot 15}{7\cdot 8}a_6=\dfrac{143}{112}$

$a_8=\dfrac{2\cdot 17}{8\cdot 9}a_7=\dfrac{2431}{4032}<1$

より $n\geqq 8$ では $a_n<1$.

これより a_nが整数になるのは

$n=1,2$のとき

第3問

$P(s,s^2)$, $Q(t,0)$, $R(x,y)$

とおくと

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{k}\begin{pmatrix}s\\s^2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{s}{k}+kt\\\frac{s^2}{k}\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x=\frac{s}{k}+kt & -1\leqq s\leqq 1\\ y=\frac{s^2}{k} & 0\leqq t\leqq 1\end{cases}$

$\downarrow$

$\begin{cases}y=\frac{1}{k}(kx-k^2t)^2\\ \quad=k(x-kt)^2=k^3\left(t-\frac{x}{k}\right)^2 \quad\cdots① \\ -\frac{1}{k}\leqq x\leqq k+\frac{1}{k}\\ 0\leqq y\leqq\frac{1}{k}\end{cases}$

①で$0\leqq t\leqq 1$でのyの範囲を考える.

(i) $\dfrac{x}{k}\leqq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\leqq\dfrac{k}{2}$のとき

[1] $x\leqq 0$のとき

$kx^2\leqq y$ かつ $0\leqq y\leqq\dfrac{1}{k}$

[2] $0\leqq x\leqq\dfrac{k}{2}$のとき

$0\leqq y\leqq k(1-kt)^2$

かつ

$0\leqq y\leqq\dfrac{1}{k}$

(ii) $\frac{x}{k} \geqq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geqq \frac{k}{2}$ のとき

$\boxed{3}$ $\frac{k}{2} \leqq x \leqq k$ のとき

$0 \leqq y \leqq kx^2$

かつ

$0 \leqq y \leqq \frac{1}{k}$

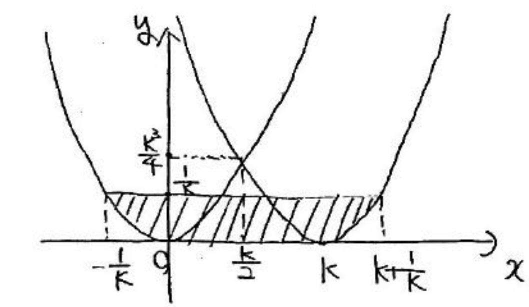
$\boxed{4}$ $x \geqq k$ のとき

$k^3(1-kt)^2 \leqq y$

かつ

$0 \leqq y \leqq \frac{1}{k}$

以上より $\frac{k^3}{4} \geqq \frac{1}{k} \Leftrightarrow k \geqq \sqrt{2}$ のとき



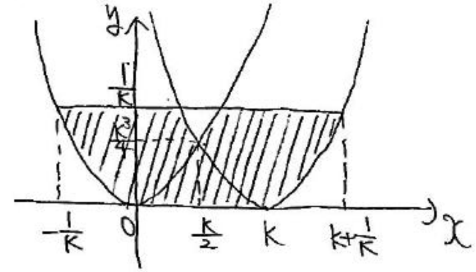
$S(k)$

$= \frac{1}{k}\left(k+\frac{2}{k}\right) - 2\int_{-\frac{1}{k}}^{0} kx^2\,dx$

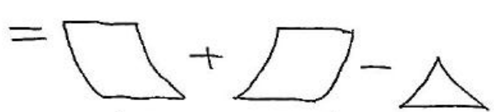
$= 1+\frac{2}{k^2} - 2\left[\frac{k}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{k}}^{0}$

$= 1+\frac{4}{3k^2}$

$\frac{k^3}{4} \leqq \frac{1}{k} \Leftrightarrow 0 < k \leqq \sqrt{2}$ のとき



$S(k)$



$= k \cdot \frac{1}{k} \times 2 - 2\int_{0}^{\frac{k}{2}} kx^2\,dx$

$= 2 - \frac{k^4}{12}$

$$\therefore S(k) = \begin{cases} 2-\frac{k^4}{12} & (0<k\leqq\sqrt{2}) \\ 1+\frac{4}{3k^2} & (k\geqq\sqrt{2}) \end{cases}$$

$\lim_{k\to+0} S(k) = 2$

$\lim_{k\to\infty} S(k) = 1$

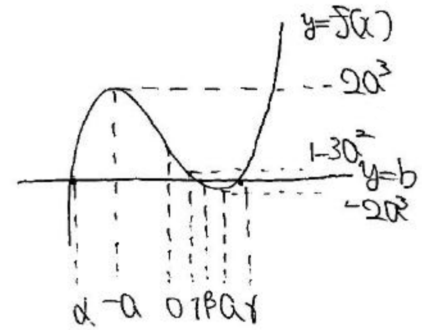
第4問

$f(x) = x^3 - 3a^2x$

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2$

$= 3(x+a)(x-a)$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$



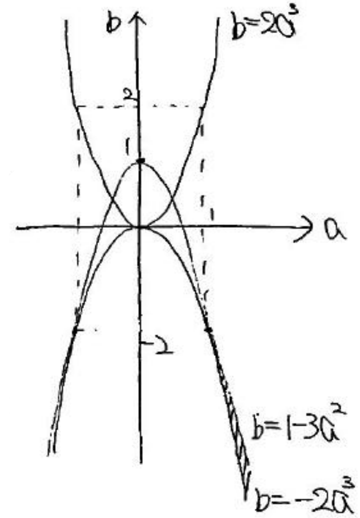
条件1を満たすには

$-2a^3 < b < 2a^3$.

条件2を満たすには

$a>1$ かつ $b<1-3a^2$.

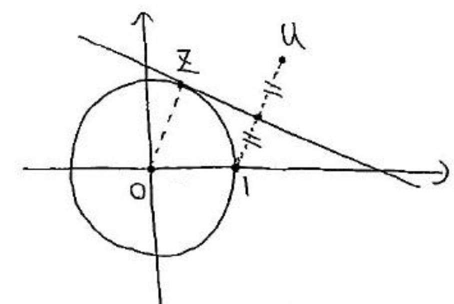
をともに満たせばよい.



領域は図の斜線部分

境界線含まず.

第5問.



$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと

接線は $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1$

接線とAの距離 d は

$d = |\cos\theta - 1|$

$= 1-\cos\theta$

$= 1-\frac{z+\bar{z}}{2}$

$u = 1 + 2\alpha z$

$= 1 + (2 - z - \bar{z})z$

$= 1 + 2z - z^2 - \underset{1}{\bar{z}z}$

$= \underline{-z^2 + 2z}$ //

$\dfrac{\bar{w}}{w}$

$= \dfrac{1-u}{1-\bar{u}}$

$= \dfrac{1+z^2-2z}{1+(\bar{z})^2-2\bar{z}}$

$= \dfrac{(z-1)^2}{(\bar{z}-1)^2}$

$= \dfrac{(z-1)^2}{(\frac{1}{z}-1)^2} = z^2$

$\dfrac{w+\bar{w}-1}{w}$

$= 1 + z^2 - (1-u) = 2z$

$\therefore \dfrac{|w+\bar{w}-1|}{|w|} = 2|z| = \underline{2}$ //

(2)

$|w+\bar{w}-1| = 2|w|$

$\downarrow$ $w = x+yi$ とおく.

$|2x-1| = 2\sqrt{x^2+y^2}$

$\downarrow$ 2乗

$4x^2-4x+1 = 4x^2+4y^2$

$\Leftrightarrow y^2 = -x + \frac{1}{4}$ … ①

$\mathrm{Re}\,z \leqq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |z-1| \geqq 1$

$\downarrow$ 2乗

$|z-1|^2 \geqq 1$

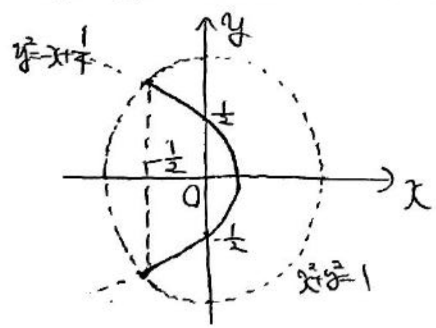
$\Leftrightarrow |(z-1)^2| \geqq 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{w}\right| \geqq 1$

$\Leftrightarrow |w| \leqq 1$

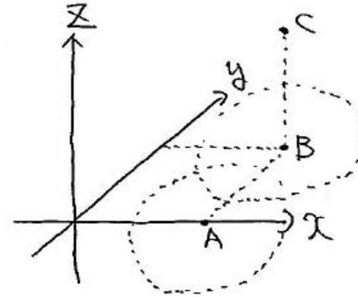
$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leqq 1$ … ②

①, ②をともに満たす軌跡は



第6問

(1)



$y=t$ が V_1, V_3 と交わる t の範囲は

V_3 の y 座標の最小値が $1-r$,

V_1 の y 座標の最大値が r なので

$\underline{1-r \leqq t \leqq r}$ //

P が線分OA, BC上にいるときの

座標を $(s, 0, 0)$, $(1, 1, u)$

とする. $y=t$ のとき

$V_1: (x-s)^2+y^2+z^2=r^2$

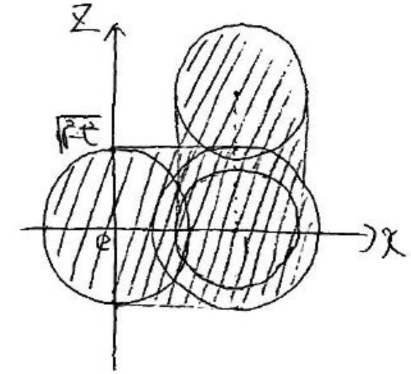
$\Leftrightarrow (x-s)^2+z^2=r^2-t^2$

$V_3: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-u)^2=r^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(z-u)^2=r^2-(t-1)^2$

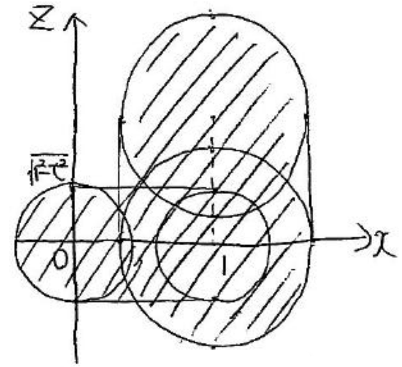
(i) $1-r \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ のとき

(V_1の半径) $\geqq$ (V_3の半径)



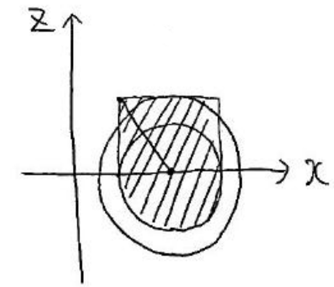
(ii) $\frac{1}{2} \leqq t \leqq r$ のとき

(V_1の半径) $\leqq$ (V_3の半径)



(2)

(i) $1-r \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ のとき



V_1 と V_3 の共通部分の原点から

1番遠い点が r 以下であればよい.

2乗すると

$r^2-(t-1)^2+r^2-t^2 \leqq r^2$

$\Leftrightarrow r^2 \leqq 2t^2-2t+1 = 2(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{1}{2} \leqq t \leqq r$ のとき

このときも同様に

$r^2 \leqq 2t^2-2t+1$

$1-r \leqq t \leqq r$ のどのtに対しても

$r^2 \leqq 2t^2-2t+1$ が成り立つには

$r^2 \leqq (2t^2-2t+1$ の最小値$)$

$= \frac{1}{2}$

であればいいので

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq r \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$r > \frac{1}{2}$ なので

$\underline{\frac{1}{2} < r \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}}$ //

(3)

V_1 の体積を $V(V_1)$ と

表すことにすると

$V(V_1 \cup V_2 \cup V_3)$

$= V(V_1)+V(V_2)+V(V_3)$

$- V(V_1 \cap V_2) - V(V_2 \cap V_3)$

$- V(V_3 \cap V_1) + V(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$

$= S+S+S-T-T-T+T$ (∵(2))

$= \underline{3S-2T}$ //

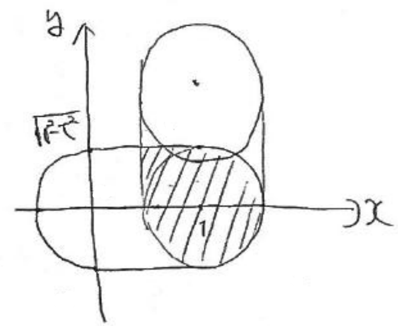
(4)

S

$= \frac{4}{3}\pi r^3 + r^2\pi \times 1$

$= \frac{4}{3}\pi r^3 + r^2\pi$

$V_1 \cap V_2$ を $z=t$ で切った断面は



となるので

T

$= \int_{-r}^{r} \left\{ (\sqrt{r^2-t^2})^2 + (\sqrt{r^2-t^2})^2 \pi \times \frac{3}{4} \right\} dt$

$= \int_{-r}^{r} \left(r^2-t^2 + \frac{3\pi}{4}(r^2-t^2) \right) dt$

$= 2\left(1+\frac{3\pi}{4}\right) \int_0^r (r^2-t^2)\,dt$

$= \left(2+\frac{3\pi}{2}\right) \left[r^2 t - \frac{t^3}{3} \right]_0^r$

$= \left(2+\frac{3\pi}{2}\right) \frac{2r^3}{3}$

$\therefore V$

$= 3\left(\frac{4}{3}\pi r^3 + r^2\pi\right) - 2\left(2+\frac{3\pi}{2}\right)\frac{2r^3}{3}$

$= \underline{\left(2\pi - \frac{8}{3}\right) r^3 + 3\pi r^2}$ //