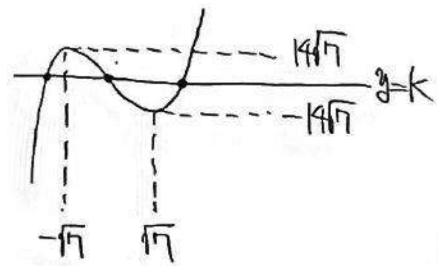
2018 帝京(医) 赤本 ②

[1]

(1) $y=x^3-21x$

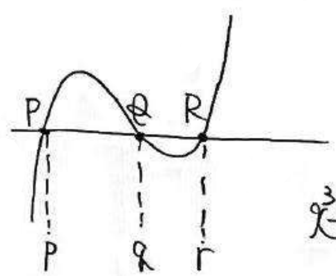
$y'=3x^2-21=3(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$



異なる3つの共有点をもつ

$\Leftrightarrow\ |k|<\underline{\underline{14\sqrt{7}}}$

(2)



$$\begin{cases} q-p=2(r-q) \\ p+q+r=0 \\ pq+qr+rp=-21 \\ pqr=k \end{cases}$$

$3q-2r=p$

$\downarrow$

$3q-2r+q+r=0$

$\Leftrightarrow 4q=r$

$\Leftrightarrow r=4q,\ p=-5q$

$\downarrow$

$-5q^2+4q^2-20q^2=-21$

$\Leftrightarrow q^2=1$

$p<q<r$ より

$q=1,\ p=\underline{\underline{-5}},\ r=4$

$\therefore k=\underline{\underline{-20}}$

(3)

S_1-S_2

$=\int_{-5}^{1}(x^3-21x-k)dx$

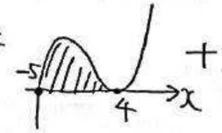
$\quad -\int_{1}^{4}(-x^3+21x+k)dx$

$=\int_{-5}^{4}(x^3-21x-k)dx$

$x^3-21x-k=0$ $=\int_{-5}^{4}(x+5)(x-1)(x-4)dx$

$=\int_{-5}^{4}(x+5)(x-4+3)(x-4)dx$

$=\int_{-5}^{4}\{(x+5)(x-4)^2+3(x+5)(x-4)\}dx$

$=$  $+3\left(-\frac{1}{6}\right)(4+5)^3$

$=\frac{1}{12}(4+5)^4-\frac{1}{2}9^3$

$=\left(\frac{9}{12}-\frac{6}{12}\right)9^3=\underline{\underline{\frac{729}{4}}}$

[2]

(1)

$f(\theta)$

$=-2\sin\theta+1-2\sin^2\theta-2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)$

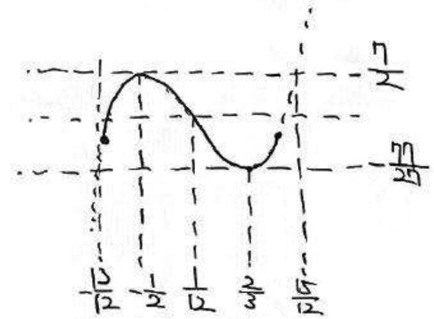
$=8\sin^3\theta-2\sin^2\theta-8\sin\theta+1$

$=8t^3-2t^2-8t+1$ $\swarrow \sin\theta=t$

$\frac{df(\theta)}{dt}=24t^2-4t-8$

$=4(6t^2-t-2)$

$=4(3t-2)(2t+1)$



$t=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\theta=-\frac{\pi}{6}$ のとき

最大値 $\underline{\underline{\frac{7}{2}}}$

また, 最小値 $\underline{\underline{-\frac{77}{27}}}$

(2)

平面ABCをA, Bの座標から

$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{c}=1$ とおくと

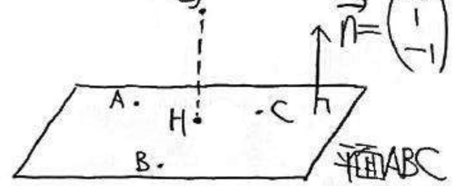
$\downarrow$ C(1, 1, 1)通る

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}=1$

$\therefore c=-2$

平面ABC: $x+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=1$

$\Leftrightarrow 2x+y-z-2=0$



法線ベクトル $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ が, 直線OHの方向ベクトルになるので

直線OH: $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$ $(t\in R)$

となる. 直線OHと平面ABCを連立すると

$4t+t+t-2=0$

$\therefore t=\frac{1}{3}$

直線OHに戻すと $H\left(\underline{\underline{\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}}}\right)$

[3]

(1)

$\log_{10} 45^{50}$

$\log_{10}\frac{10}{2} = 1-\log_{10}2$

$= 50(2\log_{10}3+\log_{10}5)$

$= 50(0.9542+1-0.3010)$

$= 50\times 1.6532$

$= 82.66$

↓

$82 < \log_{10}45^{50} < 83$

$\Leftrightarrow 10^{82} < 45^{50} < 10^{83}$

45^{50}は $\underline{83桁}$ //

例 $\boxed{10^2 < 777 < 10^3}$ 3桁

$\log_{10}45^{50}$の仮数は0.66

↓

$\underbrace{\log_{10}4}_{0.6020} < 0.66 < \underbrace{\log_{10}5}_{0.6990}$

$\Leftrightarrow \log_{10}4+82 < 82.66 < \log_{10}5+82$

$\Leftrightarrow \log_{10}4\cdot 10^{82} < \log_{10}45^{50} < \log_{10}5\cdot 10^{82}$

$\Leftrightarrow 4\cdot 10^{82} < 45^{50} < 5\cdot 10^{82}$

∴ 最高位の数字は $\underline{4}$ //

(2)

$32^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3x}{2}}$

$\Leftrightarrow 2^{5x-10} = 2^{-\frac{3x}{2}}$

$\Leftrightarrow 5x-10 = -\frac{3x}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{13}{2}x = 10$ ∴ $x = \frac{20}{13}$

(3)

$\underbrace{a^2+a-b-3b}_{0}+\underbrace{(-a^2+2b)}_{0}i = 0$

$2b = a^2$

↓

$a^2+a-2a^2=0$

$\Leftrightarrow 0 = a^2-a$

∴ $a=0, 1$

$a^2+b^2\neq 0$ より $\underline{a=1,\ b=\frac{1}{2}}$ //

[4]

(i) ABCの順列 … 3!

Aの並べ方 … 2!

B 〃 … 4!

C 〃 3!

より $3!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 3! = \underline{1728}$ //

(ii) Bの並べ方 … 4!

残りの5人の並べ方 … 5!

より $4!\cdot 5! = \underline{2880}$ //

(iii) Aの並べ方 残り

$\frac{2!\cdot 7!}{9!} = \underline{\frac{1}{36}}$ //

(2)

$a_n = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_{n-1}$ $\times\frac{n}{n+1}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{n}{n+1}a_n}_{b_n} = \underbrace{\frac{n-1}{n}a_{n-1}}_{b_{n-1}}$

↓

$b_n = b_{n-1} = \cdots = b_1 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}$

∴ $a_n = \frac{n+1}{2n}$

(i) $a_{100} = \underline{\frac{101}{200}}$ //

(ii)

$\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k$

$= \sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k+1}{2k}$

$= \sum_{k=1}^{n}(-\log_2 k+\log_2(k+1)-1)$

$= \sum_{k=1}^{n}\{-\log_2 k+\log_2(k+1)\}-n$

$= (-\log_2 1+\log_2 2)$

$+(-\log_2 2+\log_2 3)$

$+\cdots$

$+(-\log_2 n+\log_2(n+1))-n$

$= \log_2(n+1)-n \in \mathbb{Z}$

$n+1$が取れるのは ($1\leq n\leq 500$より)

$2, 4, 8, \cdots, 256$ の8コ

だから nも $\underline{8コ}$ とれる。 //