2018 聖マリアンナ医科大

1

(1)

$\log_2 a + \frac{\log_2 a^2}{\log_2 8} + \frac{\log_2 32}{\log_2 a^6} + \frac{1}{2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 a + \frac{2}{3}\log_2 a + \frac{5}{6\log_2 a} + \frac{5}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2 a + \frac{1}{6\log_2 a} + \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2(\log_2 a)^2 + 3\log_2 a + 1 = 0$

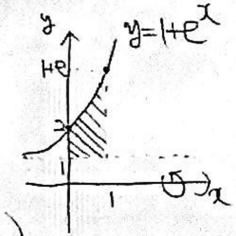
$\Leftrightarrow (2\log_2 a + 1)(\log_2 a + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 a = -\frac{1}{2}, -1$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$

$\therefore \max a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ //

(2)



V

$= \int_0^1 (1+e^x)^2 \pi\, dx$

$-$(円柱)

$= \pi\left[x + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \pi$

$= \pi\left(1 + 2e + \frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{2}\right) - \pi$

$= \frac{\pi}{2}(e^2 + 4e - 5)$ //

(3)

すべての値から7ひいても分散は変わらない。大きさを$\frac{1}{6}$倍にしたら分散は$\frac{1}{36}$倍。よってz_iの分散は1 //

念のため証明

s_z^2

$= \overline{z^2} - (\overline{z})^2$

$= \overline{\frac{1}{36}x^2 - \frac{7}{3}x + 49} - \left(\frac{1}{36}(\overline{x})^2 - \frac{7}{3}\overline{x} + 49\right)$

$= \frac{1}{36}\overline{x^2} - \frac{7}{3}\overline{x} + 49$

$\quad - \frac{1}{36}(\overline{x})^2 + \frac{7}{3}\overline{x} - 49$

$= \frac{1}{36}\left(\overline{x^2} - (\overline{x})^2\right) = \frac{1}{36}s_x^2$

追記：定義の証明の方が簡単でした。

2

1が$\frac{1}{2}$の確率で原点を中心に45°、

〃　　　　　　　-45°

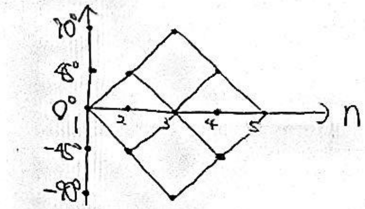
回転する。

(1)

P(4回移動で初めて最初に戻る)

$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$ //

(2)



$P(a_5 = 1)$

$= P$(4回中2回45°回転、2回(−45°)回転)

$= {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ //

(3)

$P(a_9 = 1)$

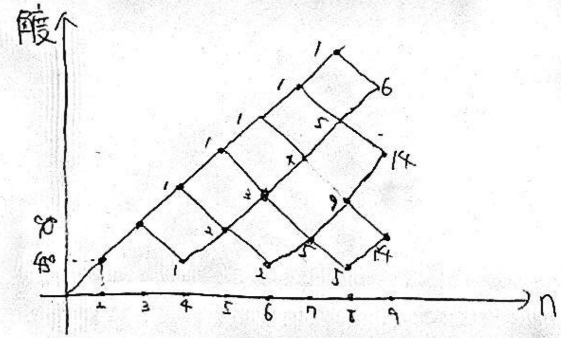
$= P$(8回中4回45°回転、4回(−45°)回転)

$+ P$(8回連続45°回転)

$+ P$(　〃　(−45°)回転)

$= ({}_8C_4 + 1 + 1)\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{9}{32}$ //

(4) $a_2 \sim a_9$に1が含まれない場合



逆のケースもあるので

$P(a_2 \sim a_9$に1が含まれない$)$

$= \frac{6+14+14}{2^8} \times 2 = \frac{17}{64}$

$\therefore P(a_2$からa_9に1が含まれる$)$

$= 1 - \frac{17}{64} = \frac{47}{64}$ //

3

(1)

$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2$

$= (\cos 2t + \sin 2t)^2 + (\sin 2t - \cos 2t)^2$

$= 2 \qquad \therefore |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2}$ //

(2)

$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -\sin 2t - \cos 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t - \cos 2t \\ \sqrt{2}\sin t - \sin 2t \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$

$= (-\sin 2t - \cos 2t)\sqrt{2}\cos t$

$+ (\sin 2t + \cos 2t)\cos 2t$

$+ (\cos 2t - \sin 2t)\sqrt{2}\sin t$

$- (\cos 2t - \sin 2t)\sin 2t$

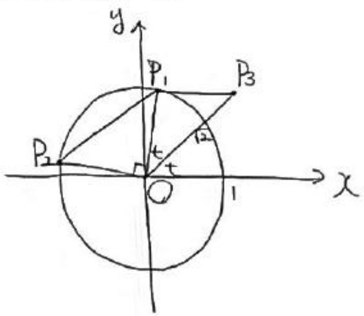
$= (-\sin 2t - \cos 2t)\sqrt{2}\cos t$
$\quad + (\cos 2t - \sin 2t)\sqrt{2}\sin t + 1$

$= -\sqrt{2}(\sin 2t\cos t - \cos 2t\sin t)$
$\quad - \sqrt{2}(\cos 2t\cos t + \sin 2t\sin t) + 1$

$= -\sqrt{2}\sin(2t-t) - \sqrt{2}\cos(2t-t) + 1$

$= \underline{1 - \sqrt{2}\sin t - \sqrt{2}\cos t}$ //

(2) $P_2\left(\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$
より図を書く.



$\triangle P_1P_2P_3$

$= \triangle OP_1P_2 + \triangle OP_3P_1 - \triangle OP_3P_2$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}_{\cos t}$

$= \frac{1}{2}\underbrace{\left\{1 + \sqrt{2}(\sin t - \cos t)\right\}}_{f(t)}$

$f(t) = 1 + 2\sqrt{2}(\sin t - \cos t)$
$\quad + 2(\sin t - \cos t)^2$

$= \underline{3 + 2\sqrt{2}\sin t - 2\sqrt{2}\cos t - 2\sin 2t}$ //

(3)
$f'(t)$
$= 2\sqrt{2}\cos t + 2\sqrt{2}\sin t - 4\cos 2t$
$= 2\sqrt{2}(\cos t + \sin t) - 4(\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)$

$= 2(\cos t + \sin t)(\sqrt{2} - 2\cos t + 2\sin t)$
$= 2\sqrt{2}(\sin t + \cos t)\{1 + \sqrt{2}\sin t - \sqrt{2}\cos t\}$
$= 4\left\{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$
$\quad \left\{1 + 2\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$f'(t) = 0$
$\Leftrightarrow \underline{t = \frac{3}{4}\pi}$ // $\because -\frac{\pi}{6} < t - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{6}\pi$

(4)

t	$\frac{\pi}{12}$ $\cdots$ $\frac{3}{4}\pi$ $\cdots$ $\frac{17}{12}\pi$
$f'(t)$	$+$ $\quad 0 \quad -$
$f(t)$	↗ $\quad\quad$ ↘

$\max \triangle P_1P_2P_3$
$= \frac{1}{2}\left\{1 + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$
$= \underline{\frac{3}{2}}$ //

4

(1) $n = 4x + 7y$

x	y	n
0	0	0
0	1	7
0	2	14
0	3	21
1	0	4
1	1	11
1	2	18
1	3	25

x	y	n
2	0	8
2	1	15
2	2	22
3	0	12
3	1	19
3	2	26
4	0	16
4	1	23
5	0	20
5	1	27

(2) $n = ax_0 + by_0$.
$y_0 = ak + y$ （kは整数）
とおくと
$n = ax_0 + bak + by$
$\quad = a(x_0 + bk) + by$
$x_0 + ak = x$ とすれば $n = ax + by$
と表せる.

(3)
$n = (a-1)(b-1) - 1$ がAの要素
だとすると
$ax + by = (a-1)(b-1) - 1$
$\Leftrightarrow ax + by - ab + a + b = 0$
$\Leftrightarrow a(x - b + 1) + b(y+1) = 0$
をみたす0以上の整数 x, y が存在.

$\begin{cases} x - b + 1 = bk \\ y + 1 = -ak \end{cases}$ （kは整数）

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b(k+1) - 1 \geqq 0 \\ y = -ak - 1 \geqq 0 \end{cases}$

⇓

$\begin{cases} k + 1 \geqq \frac{1}{b} \Leftrightarrow k \geqq \frac{1}{b} - 1 \\ -ak \geqq 1 \Leftrightarrow k \leqq -\frac{1}{a} \end{cases}$

$\therefore \frac{1}{b} - 1 \leqq k \leqq -\frac{1}{a}$ …①

ところで $-1 < \frac{1}{b} - 1 \leqq 0$
$\quad -1 \leqq -\frac{1}{a} < 0$ より
①を満たす整数 k は存在しない.
つまり $n = (a-1)(b-1) - 1$ はAの要素でない

(4)
$ax + by = n$ と表せる.
$ax = n - by$
$\quad \geqq (a-1)(b-1) - by$ $\quad$ ($0 < y \leqq a-1$)
$\quad \geqq (a-1)(b-1) - b(a-1)$
$\quad = 1 - a$
$\Leftrightarrow x \geqq \frac{1}{a} - 1 \geqq -1$
すなわち $x \geqq 0$
つまり $n \geqq (a-1)(b-1)$ のとき
$n \in A$.