2018 日本医科大

[I]

他の解をα, βとおくと$(\alpha<\beta)$,
解と係数の関係より

$$\begin{cases} 4+\alpha+\beta=-6 \\ 4\alpha+\alpha\beta+4\beta=-p \\ 4\alpha\beta=q \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-10 \\ \alpha\beta=40-p \\ 4\alpha\beta=q \end{cases}$$

(i) $\alpha<0, \beta<0$ のとき

$\alpha, 4, \beta \cdots$ 等比

$\Downarrow$

$\alpha\beta=16$

このとき $\underline{p=24,\ q=64}$

α, βを解にもつ2次方程式は

$x^2+10x+16=0$

$\therefore \underline{\alpha=-8,\ \beta=-2}$

(ii) $\alpha<0, \beta>0$ のとき

$4, \alpha, \beta \cdots$ 等比

$\Downarrow$

$$4\beta=\alpha^2$$
$$=(-\beta-10)^2$$
$$=\beta^2+20\beta+100$$
$$\Leftrightarrow 0=\beta^2+16\beta+100$$
$$=(\beta+8)^2+36>0$$

よりこれをみたす実数βは存在しない.

[II]

問1 $A(a, a^2), B(b, b^2), C(c, c^2)$
とおくと

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} b-a \\ b^2-a^2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} c-a \\ c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

より

$$S=\frac{1}{2}\left|(b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|(b-a)(c-a)\{c+a-(b+a)\}\right|$$
$$=\underline{\frac{1}{2}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|}$$

問2.

a, b, cは$1\sim6$の自然数.
それぞれの差が大きくなるとき最大になるので
$(a, b, c)=(1, 3, 6), (1, 4, 6)$
のとき 最大値 $\underline{15}$

それぞれの差が小さいとき最小になるので
$(a, b, c)=(1, 2, 3)\sim(4, 5, 6)$
のとき 最小値 $\underline{1}$

問3

$a-b, b-c, c-a$が2つ以上偶数、
か少なくとも1つ4の倍数があればいい. これらは

$(1, 3, 5), (1, 5, 2), (1, 5, 4)$
$(1, 5, 6), (2, 6, 1), (2, 6, 3)$
$(2, 6, 4), (2, 6, 5)$

の8通り. 求める確率は

$$\frac{8}{{}_6C_3}=\frac{8}{20}=\underline{\frac{2}{5}}$$

[III]

$x-t=u$ とおく.

$$f(x)=\log(x+1)+\int_x^0 f(u)\sin(x-u)(-du)$$
$$=\log(x+1)+\int_0^x f(u)(\sin x\cos u-\cos x\sin u)du$$
$$=\log(x+1)+\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,du-\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,du$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,du+\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,du \cdots ①$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,du+\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,du+f(x)$$
$$=-\frac{1}{(x+1)^2}+\log(x+1)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+(x+1)\log(x+1)-x+C$$

$\Downarrow$ ①より $f'(0)=1$ より $C=0$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+(x+1)\log(x+1)-x$$

$$f(x)=\log(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{x^2}{2}+C_2$$

$\Downarrow$ $f(0)=0$ より $C_2=\frac{1}{4}$

$$\therefore f(x)=\underline{\frac{1}{2}(x^2+2x+3)\log(x+1)-\frac{3}{4}x^2-\frac{x}{2}}$$

[IV]

問1

wが純虚数なので

$w+\overline{w}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{|z|^2-2z}+\dfrac{1}{|z|^2-2\overline{z}}=0 \quad (z\neq 0,2)$

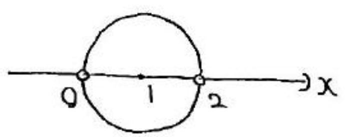
$\Leftrightarrow |z|^2-2z=-|z|^2+2\overline{z}$

$\Leftrightarrow 2|z|^2-2z-2\overline{z}=0$

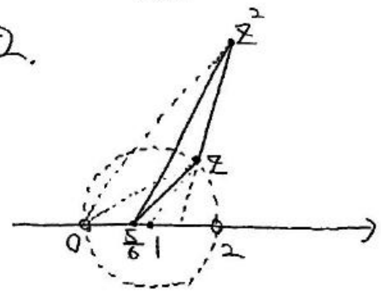
$\Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1)=1$

$\Leftrightarrow |z-1|=1$

$(z\neq 0,2)$



問2.



$\frac{5}{6}, z, z^2$を表す頂点を順に

A, B, Cとおくと

$A\left(\frac{5}{6}, 0\right)$

$B(\cos\theta+1, \sin\theta)$

$C((\cos\theta+1)^2-\sin^2\theta, 2(\cos\theta+1)\sin\theta)$

とおける

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}\cos\theta+\frac{1}{6}\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta+2\cos\theta+\frac{1}{6}\\ 2(\cos\theta+1)\sin\theta\end{pmatrix}$

$2S(z)$

$=\left|\left(\cos\theta+\frac{1}{6}\right)2(\cos\theta+1)\sin\theta - \left(\cos 2\theta+2\cos\theta+\frac{1}{6}\right)\sin\theta\right|$

$=\left|\left(2\cos^2\theta+\frac{7}{3}\cos\theta+\frac{1}{3}\right)\sin\theta - \left(2\cos^2\theta+2\cos\theta-\frac{5}{6}\right)\sin\theta\right|$

$=\left|\left(\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{7}{6}\right)\sin\theta\right|$

$=|f(\theta)|$ とおく

$0<\theta<\pi$のとき $2S(z)=f(\theta)$

$f'(\theta)=-\frac{1}{3}\sin^2\theta+\frac{1}{3}\cos^2\theta+\frac{7}{6}\cos\theta$

$=\frac{2}{3}\cos^2\theta+\frac{7}{6}\cos\theta-\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{6}(4\cos^2\theta+7\cos\theta-2)$

$=\frac{1}{6}(4\cos\theta-1)(\cos\theta+2)$

$\cos\alpha=\frac{1}{4}$ とする

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(\theta)$	×	+		−	×
$f(\theta)$	×	↗		↘	×

$\theta=\alpha$のとき最大.

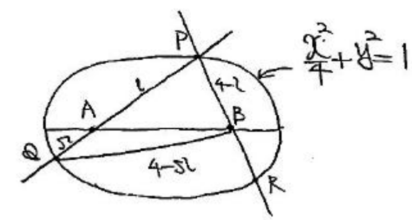
そのとき $z=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{15}}{4}i$ で $S(z)$の最大値

$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{6}\right)\frac{\sqrt{15}}{4}\right|$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{12}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=\frac{5\sqrt{15}}{32}$

[V]



問1 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$

$A(-\sqrt{3}, 0)$, $P(2\cos\theta, \sin\theta)$

とおけるので

l

$=|\overrightarrow{PA}|$

$=\sqrt{(2\cos\theta+\sqrt{3})^2+\sin^2\theta}$

$=\sqrt{3\cos^2\theta+4\sqrt{3}\cos\theta+4}$

$=\sqrt{3\left(\cos\theta+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{3}\left|\cos\theta+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right|$

$\min l=2-\sqrt{3}$

$\max l=4-(2-\sqrt{3})$

より

$2-\sqrt{3}\leqq l\leqq 2+\sqrt{3}$

問2.

$\triangle PAB$と$\triangle BAQ$に余弦定理

$\cos\angle PAB=\dfrac{12+l^2-(4-l)^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot l}$

$\cos\angle BAQ=\dfrac{12+s^2l^2-(4-sl)^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot sl}$

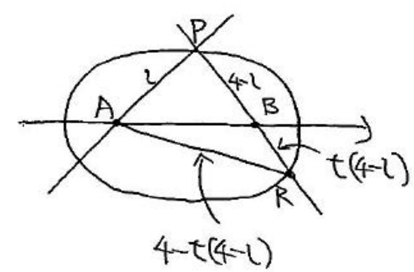
↓

$\dfrac{8l-4}{4\sqrt{3}l}=-\dfrac{8sl-4}{4\sqrt{3}sl}$

$\Leftrightarrow (2l-1)s=-(2sl-1)$

$\Leftrightarrow (4l-1)s=1$

$\therefore s=\dfrac{1}{4l-1}$



同様に

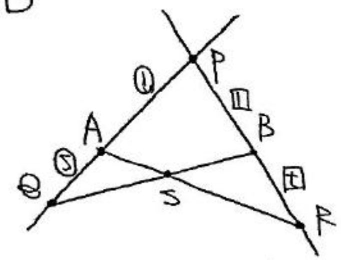
$\dfrac{12+(4-l)^2-l^2}{2\cdot 2\sqrt{3}(4-l)}=-\dfrac{12+t^2(4-l)^2-\{4-t(4-l)\}^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot t(4-l)}$

$\Leftrightarrow t(28-8l)=-\{8t(4-l)-4\}$

$\Leftrightarrow t(60-16l)=4$

$\therefore t=\dfrac{1}{15-4l}$

問3



メネラウスの定理

$$\frac{1+s}{s}\cdot\frac{AS}{SR}\cdot\frac{t}{1}=1$$

$\therefore AS:SR = s : t(1+s)$

$$\overrightarrow{PS}$$
$$=\frac{t(1+s)\vec{a}+s(1+t)\vec{b}}{s+t(1+s)}$$
$$=\frac{(4\ell-1+1)\vec{a}+(15-4\ell+1)\vec{b}}{15-4\ell+4\ell-1+1}$$
$$=\frac{4\ell}{15}\vec{a}+\frac{16-4\ell}{15}\vec{b}$$

$\therefore u=\frac{4\ell}{15} \quad v=\frac{16-4\ell}{15}$ //

$\Leftrightarrow 3(1+s)(1+t)=8$

$\Leftrightarrow 3(4\ell-1+1)(15-4\ell+1)$
$=8(4\ell-1)(15-4\ell)$

$\Leftrightarrow 3\ell(16-4\ell)=2(4\ell-1)(15-4\ell)$

$\Leftrightarrow 3\ell(8-2\ell)=(-16\ell^2+64\ell-15)$

$\Leftrightarrow 10\ell^2-40\ell+15=0$

$\Leftrightarrow 2\ell^2-8\ell+3=0$

$\therefore \ell=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$ //

これは $2-\sqrt{3}\leqq \ell \leqq 2+\sqrt{3}$ をみたす.

問4

先程のメネラウスの定理と同様に

$BS:SQ = t : s(1+t)$

より

$T_1:T_2 = st : st(1+s)(1+t)$
$= 1:(1+s)(1+t) = 3:8$