2018 杏林大(医)

Ⅰ

(a)

$a_2 = 3a_1 - b_1 = \underline{1}$ //

$b_n = -a_{n+1} + 3a_n$ より

$-a_{n+2} + 3a_{n+1} = 4a_n + 7(-a_{n+1} + 3a_n)$

$\Leftrightarrow 0 = a_{n+2} - 10a_{n+1} + 25a_n$

$\downarrow$ 特 $\alpha^2 - 5\alpha + 25 = 0$ ∴ $\alpha = 5$

$a_{n+2} - 5a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 5a_n)$

∴ $p = \underline{5}$ //

$a_{n+1} - 5a_n$ は初項 $a_2 - 5a_1 = -4$

公比 $\underline{5}$ // の等比数列より

$a_{n+1} - 5a_n = \underline{-4} \times \underline{5^{n-1}}$ //

$\downarrow \div 5^{n+1}$

$\dfrac{a_{n+1}}{5^{n+1}} - \dfrac{a_n}{5^n} = -\dfrac{4}{25} = \underline{\dfrac{-4}{25}}$ //

$\dfrac{a_n}{5^n}$ は初項 $\dfrac{1}{5}$, 公差 $-\dfrac{4}{25}$ の等差数列

$\dfrac{a_n}{5^n} = \dfrac{1}{5} + (n-1)\left(-\dfrac{4}{25}\right)$

$= \dfrac{-4n+9}{25}$

∴ $a_n = \underline{(-4n+9)} \times \underline{5^{n-2}}$ //

$b_n = -(-4n+5) \times 5^{n-1}$

$+ (-12n+27) \times 5^{n-2}$

$= (8n+2) \times 5^{n-2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \underline{\frac{-1}{2}}$ //

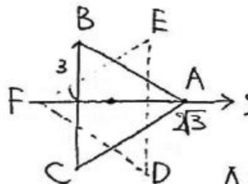
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2a_n + b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{20 \cdot 5^{n-2}}$

$= \dfrac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{5}}$

$= \underline{\dfrac{5}{16}}$ //

Ⅱ

(a)



$A(\underline{2\sqrt{3}}, 0, 0)$ //

$D(\sqrt{3}, -3, z_D)$ とおくと

$DA = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2 + z_D^2} = 6$

∴ $z_D^2 = 24$ ∴ $z_D = \underline{2\sqrt{6}}$ //

$M(-\sqrt{3}, 0, 0)$、$F(-2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{6})$

∴ $\overrightarrow{MF} = \underline{\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}}$ // $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MA} = |\overrightarrow{MF}||\overrightarrow{MA}| \cos\theta$

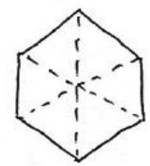
$\Leftrightarrow -9 = 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \cos\theta$

∴ $\cos\theta = \underline{\dfrac{-1}{3}}$ //

この立体を xy 平面に平行に切ったとき断面は周が $\underline{18}$ // で $\underline{6}$ // 角形

$t = \underline{\dfrac{1}{2}}$ // で最大. ∵ $\boxed{\text{底面と上面が対称なので中心が}}$

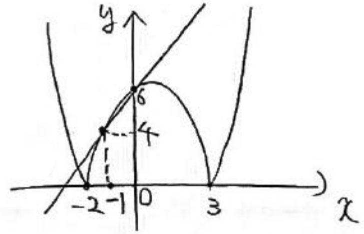
図が3の正六角形となる.



(面積) $= \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ \times 6 = \underline{\dfrac{27}{2}\sqrt{3}}$ //

(外接円の半径) $= \underline{3}$ //

Ⅲ



図から判断.

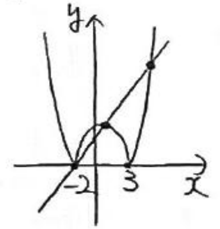
$x^2 - x - 6 > 2x + 6$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 12 > 0$

より求める範囲は

$x < \dfrac{3 - \sqrt{57}}{2}$, $-1 < x < 0$, $\dfrac{3 + \sqrt{57}}{2} < x$

(b)

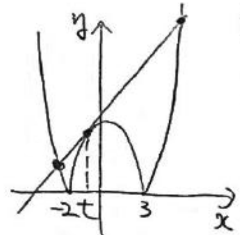


(i) 左のようになるとき

$(-2, 0)$ 通るので

$0 = -4 + k$

∴ $k = \underline{4}$ //



(ii) 左のようになるとき

$f(x) = -2x + 1$

$(-2 < x < 3)$

より

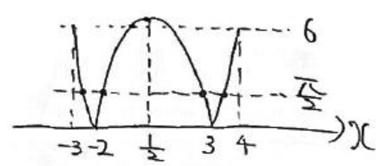
$-2t + 1 = 2$

∴ $t = -\dfrac{1}{2}$

$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{21}{4}\right)$ 通るので

$\dfrac{21}{4} = -1 + k$ ∴ $k = \underline{\dfrac{25}{4}}$ //

(c)



$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{4}<2\pi$

$y=\sin(f(x))$が極大をとるのは

$f(x)=\frac{\pi}{2}$のときと$f(x)$が

$\frac{5}{4}\pi$のときなので$\underline{5個}$存在.

極大値が未満なのは$\underline{x=\frac{1}{2}}$

のとき.

IV

(a) $f(0)=\underline{0}$

(b)

$x>0$のとき

$f(x)=-x\log x$

$f'(x)=-\log x-1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

x	$0 \cdots \frac{1}{e} \cdots$
$f'(x)$	$+ \ 0 \ -$
$f(x)$	$0 \nearrow \frac{1}{e} \searrow$

$\beta=\pm\frac{1}{e}$

$\alpha=f(\beta)=\frac{1}{e}$

$\log_e\alpha=\underline{-1}$ $\log_e|\beta|=\underline{-1}$

(c)

$x>0$のとき

$(t, f(t))\ (t>0)$での接線は

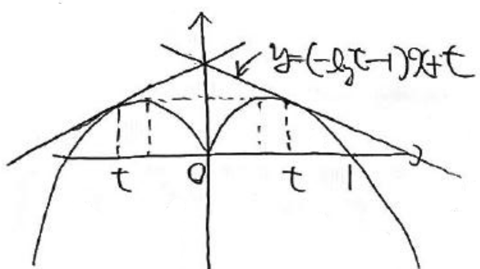
$y=(-\log t-1)(x-t)-t\log t$

$=(-\log t-1)x+t$

$\downarrow (-1,1)$通る

$1=\log t+1+t$

$\therefore t+\log t=t+\log_e|t|=\underline{0}$



$x<0$のとき$t<0$

図よりy軸対称であることをふまえ

$(t, f(t))$での接線は

$y=(\log(-t)+1)x-t$

$\downarrow (-1,1)$通る

$1=-\log(-t)-1-t$

$\therefore t+\log_e|t|=\underline{-2}$

$g(t)=t+\log|t|$

$g'(t)=1+\frac{1}{t}=\frac{t+1}{t}$

t	$\cdots -1 \cdots 0 \cdots$
$g'(t)$	$+ \ 0 \ - \ \times \ +$
$g(t)$	$\nearrow -1 \searrow \times \nearrow$

$g(-e^2)=-e^2+2<-2$

$\lim_{t\to-0} g(t)=-\infty$

$\lim_{t\to+0} g(t)=-\infty$

$\lim_{t\to\infty} g(t)=\infty$ より

$t+\log_e|t|=0$ は 1コ $(t>0)$

$t+\log_e|t|=-2$ は 2コ $(t<0)$

計tの解が3コ、接線$\underline{3本}$存在

(d)

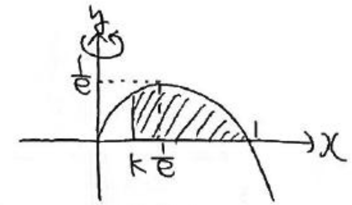
$S(k)=\int_k^1(-x\log x)dx$

$=\left[-\frac{x^2}{2}\log x+\frac{x^2}{4}\right]_k^1$

$\boxed{-x\log x-\frac{x}{2}}\ \boxed{+\frac{x}{2}}$ 微分したもの

$=\frac{1}{4}+\frac{k^2}{2}\log k-\frac{k^2}{4}$

$\lim_{k\to0}S(k)=\underline{\frac{1}{4}}$



バームクーヘン積分する.

$V(k)$

$=\int_k^1 2\pi x(-x\log x)dx$

$=-2\pi\int_k^1 x^2\log x\,dx$

$=-2\pi\left[\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}\right]_k^1$

$\boxed{x^2\log x+\frac{x^2}{3}}\ \boxed{-\frac{x^2}{3}}$ 微分したもの

$=-2\pi\left\{-\frac{1}{9}-\left(\frac{k^3}{3}\log k-\frac{k^3}{9}\right)\right\}$

$\lim_{k\to0}V(k)$

$=\underline{\frac{2}{9}\pi}$