2018 近畿大(医)後期

$\boxed{1}$

(1) 10コの中から4コ選べば四角形ができ、その対角線は必ず交わる。

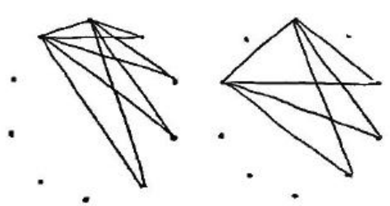
$${}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\underline{210\text{組}}$$

(2)

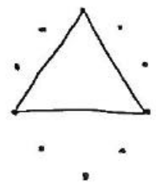
1つの頂点から4つ二等辺三角形ができる。頂点が10コあるので

$4\times10=\underline{40\text{個}}$

(3)



4コ　3コ

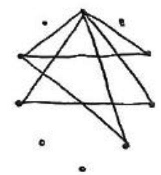


1コ

以上より

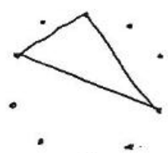
$4+3+1=\underline{8\text{個}}$

(4) (3)で頂点が隣り合っていないのは4コ。



左の3コは二等辺三角形。

$3\times10=30$コある。

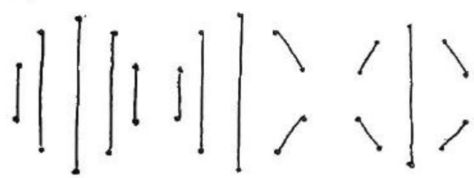


左のこれは表裏返したものも考慮する。

$2\times10=20$コ。

以上より全部で $\underline{50\text{個}}$

(5)



5コ　10コ　5コ

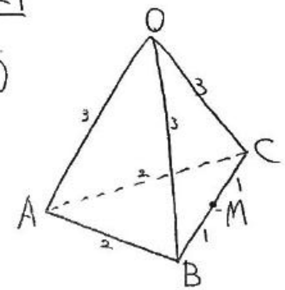
10コ　10コ　2コ

回転も考え、以上のようになる。

たすと $\underline{42\text{通り}}$

$\boxed{2}$

(1)



$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$$
$$=\underbrace{|\vec{b}|^2}_{9}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\underbrace{|\vec{a}|^2}_{9}=4$$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\underline{7}$

(2) 線分BCの垂直二等分線上にHがくるので

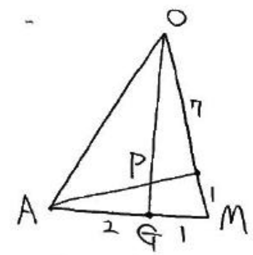
$\overrightarrow{OH}=s\vec{b}+s\vec{c}$ とおける。

$$\overrightarrow{AH}=-\vec{a}+s\vec{b}+s\vec{c}$$
$$\downarrow \overrightarrow{AH}\perp\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b}=-\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2+s\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=-7+9s+7s$$
$$=16s-7=0\quad\therefore\ s=\frac{7}{16}$$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OH}=\frac{7}{16}(\vec{b}+\vec{c})}=\frac{7}{8}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

BCの中点をMとする。



メネラウスの定理より

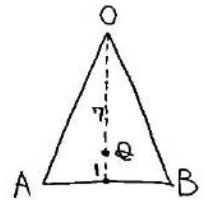
$$\overrightarrow{OP}=\frac{21}{23}\overrightarrow{OG}$$
$$=\frac{21}{23}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$
$$=\underline{\frac{7}{23}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$$

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{1}{23}(7\vec{a}+7\vec{b}-16\vec{c})$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ}$$
$$=\vec{c}+t\overrightarrow{CP}$$
$$=\frac{1}{23}(7t\vec{a}+7t\vec{b}+\underbrace{(23-16t)}_{0}\vec{c})$$
$$\downarrow t=\frac{23}{16}$$

$\underline{\overrightarrow{OQ}=\frac{7}{16}(\vec{a}+\vec{b})}$

(3)



(四面体OBCQ)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8}$ (四面体OABC)

$= \frac{7}{16} \underbrace{\triangle ABC}_{\sqrt{3}} \times |\overrightarrow{OG}| \times \frac{1}{3}$

$= \frac{7\sqrt{3}}{48} |\overrightarrow{OG}|$

ここで

$|\overrightarrow{OG}|^2 = \left|\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2$

$= \frac{1}{9}(9+9+9+14+14+14)$

$= \frac{69}{9}$

$\therefore |\overrightarrow{OG}| = \frac{\sqrt{69}}{3}$

$= \frac{7\sqrt{3}}{48} \cdot \frac{\sqrt{3}\sqrt{23}}{3} = \underline{\frac{7\sqrt{23}}{48}}$ //

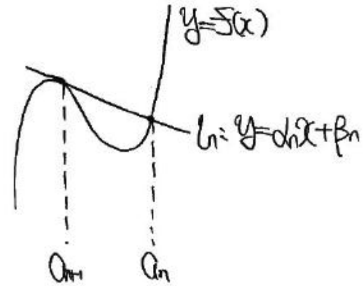
$\boxed{3}$

$y = x^3 - 3x^2 = f(x)$ とおく

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$= 3x(x-2)$

(1)



l_n を $y = \alpha_n x + \beta_n$ とする.

C と l_n を連立して

$x^3 - 3x^2 - \alpha_n x - \beta_n = (x - a_{n+1})^2 (x - a_n)$

とできるので, 解と係数の関係より

$2a_{n+1} + a_n = 3$

$\Leftrightarrow a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow a_{n+1} - 1 = -\frac{1}{2}(a_n - 1)$

$\{a_n - 1\}$ の一般項は

$a_n - 1 = (a_1 - 1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

つまり

$\underline{a_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1}$ //

(2)

$\alpha_n = f'(a_{n+1})$

$= 3\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right\}\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right\}$

$= 12\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} - 3$

$= \underline{12\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3}$ //

(3)

l_n と C ではどちらが上かは n により異なる.

$S_n = \left| \int_{a_{n+1}}^{a_n} (x - a_{n+1})^2 (x - a_n) \, dx \right|$

$= \left| \int_{a_{n+1}}^{a_n} \{(x - a_{n+1})^2 (x - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n)\} \, dx \right|$

$= \left| \int_{a_{n+1}}^{a_n} \{(x - a_{n+1})^3 + (a_{n+1} - a_n)(x - a_{n+1})^2\} \, dx \right|$

$= \left| \left[\frac{1}{4}(x - a_{n+1})^4 + \frac{a_{n+1} - a_n}{3}(x - a_{n+1})^3 \right]_{a_{n+1}}^{a_n} \right|$

$= \frac{1}{12}(a_n - a_{n+1})^4$

$= \frac{1}{12}\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}^4$

$= \frac{1}{12}\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^4$

$= \underline{\frac{27}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4n-4}}$ //