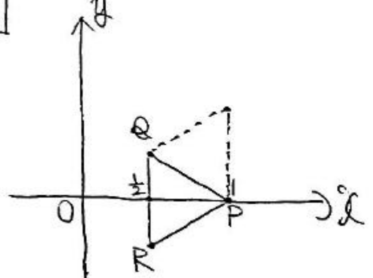
2017 早稲田理工

$\boxed{1}$



(1) 直線PQは $\bar{\alpha}$ と $1+\frac{\sqrt{3}}{3}i=2\alpha$ の垂直二等分線

$$|z-\bar{\alpha}|=|z-2\alpha|$$

↓ 2乗

$$(z-\bar{\alpha})(\bar{z}-\alpha)=(z-2\alpha)(\bar{z}-2\bar{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow -\alpha z-\bar{\alpha}\bar{z}+|\alpha|^2=-2\bar{\alpha}z-2\alpha\bar{z}+4|\alpha|^2$$

$$\Leftrightarrow (2\bar{\alpha}-\alpha)z+(2\alpha-\bar{\alpha})\bar{z}-3\cdot\frac{1}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-2\bar{\alpha})z+(\bar{\alpha}-2\alpha)\bar{z}+1=0$$

$$\therefore \beta=\alpha-2\bar{\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i-\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{6}i\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2) $z=\frac{1}{w}\ (w\neq 0)$

を $\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+1=0$ に代入.

$$\frac{\beta}{w}+\frac{\bar{\beta}}{\bar{w}}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\bar{w}+\bar{\beta}w+w\bar{w}=0$$

$$\Leftrightarrow (w+\beta)(\bar{w}+\bar{\beta})=|\beta|^2$$

$$\Leftrightarrow (w+\beta)(\overline{w+\beta})=1$$

$$\therefore |w+\beta|=1\quad (w\neq 0)$$

$-\beta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を中心にした半径1の円. ただし原点を除く.

(3)

$z=1$ のとき $w=1$

$z=\alpha$ のとき $w=\frac{1}{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}}=3\bar{\alpha}$

$z=\bar{\alpha}$ のとき $w=\frac{1}{\bar{\alpha}}=\frac{\alpha}{\alpha\bar{\alpha}}=3\alpha$

である.

まず z が辺PQを動くとき w は (2)の円の $w=1$ から $w=3\bar{\alpha}$ までの弧を動く.

z が直線PRを動くとき, α と $2\bar{\alpha}$ の垂直二等分線なので

$$|z-\alpha|=|z-2\bar{\alpha}|.$$

これは直線PQの α を $\bar{\alpha}$ に変えただけなので w の動く式は

$$|w+\bar{\beta}|=1\quad (w\neq 1)$$

となる. この円の $w=1$ から $w=3\alpha$ までの弧を動く.

z が直線QRを動くとき, 0と1の垂直二等分線なので

$$|z|=|z-1|.$$

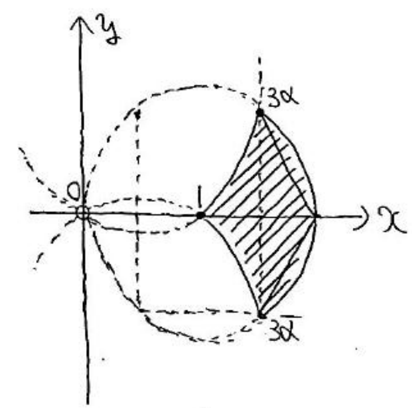
w は

$$\left|\frac{1}{w}\right|=\left|\frac{1}{w}-1\right|$$

$$\Leftrightarrow 1=|1-w|$$

$$\Leftrightarrow |w-1|=1\quad (w\neq 1)$$

となる. この円の $w=3\bar{\alpha}$ から $w=3\alpha$ までの弧を動く.



以上より w は図の斜線部分の周上を動く. 面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 60^\circ\times 2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{2}$

(1)

$$f'(x)$$

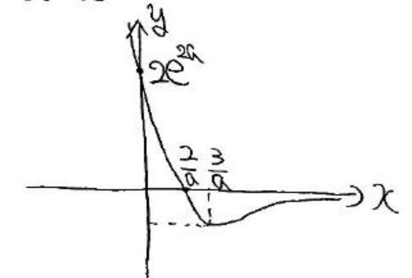
$$=-ae^{-a(x-2)}-a(2-ax)e^{-a(x-2)}$$

$$=a(ax-3)e^{-a(x-2)}$$

x	$\cdots$ $\frac{3}{a}$ $\cdots$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	↘ $-e^{2a-3}$ ↗

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$



(2) $p=\frac{3}{a}$ より

$$S$$

$$=\int_0^{\frac{2}{a}} f(x)dx+\int_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}}\{-f(x)\}dx$$

ここで

$\int f(x)\,dx$

$= (2-ax)\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-a(x-2)}$

$\quad -(-a)\frac{1}{a^2}e^{-a(x-2)}$

$= \left(x-\frac{1}{a}\right)e^{-a(x-2)}+C$

$\quad F(x)=\left(x-\frac{1}{a}\right)e^{-a(x-2)}$

とおくと

S

$= F\left(\frac{2}{a}\right)-F(0)-F\left(\frac{3}{a}\right)+F\left(\frac{2}{a}\right)$

$= 2\frac{1}{a}e^{2a-2}+\frac{1}{a}e^{2a}-\frac{2}{a}e^{2a-3}$

$= \frac{e^{2a}}{a}\left(\frac{2}{e^2}+1-\frac{2}{e^3}\right)$

$= \underline{\left(1+\frac{2}{e^2}-\frac{2}{e^3}\right)\frac{e^{2a}}{a}}$ //

(3) $1+\frac{2}{e^2}-\frac{2}{e^3}>0$ より

$g(a)=\frac{e^{2a}}{a}$ とおくと

$g'(a)=\frac{2ae^{2a}-e^{2a}}{a^2}$

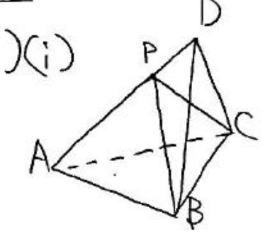
$\quad = \frac{2a-1}{a^2}e^{2a}$

a	$0 \cdots \frac{1}{2} \cdots$
$g'(a)$	$- \; 0 \; +$
$g(a)$	↘ ↗

$\underline{a=\frac{1}{2}}$ のとき $g(a)$ とSが最小 //

$\boxed{3}$

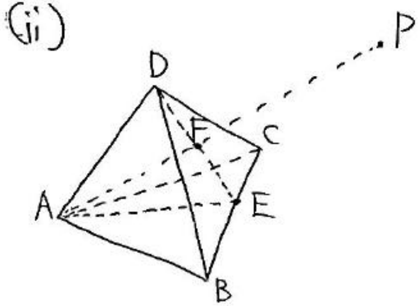
(1)(i)



図より

$\frac{V_P}{V_D}=\underline{|t|}$ //

(ii)



$\overrightarrow{AP}$

$= (b+c)\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{c+b}+d\overrightarrow{AD}$

$= (b+c)\overrightarrow{AE}+d\overrightarrow{AD}$

$= \frac{(b+c)\overrightarrow{AE}+d\overrightarrow{AD}}{d+b+c}(b+c+d)$

$= (b+c+d)\overrightarrow{AF}$

Fは線分EDを $d:b+c$ に内分．△ABCに対するFの高さはDの高さの $\left|\frac{d}{d+b+c}\right|$，Pの高さはFの高さの $|b+c+d|$ 倍より

$\frac{V_P}{V}=\left|\frac{d}{d+b+c}\right||b+c+d|$

$\quad = \underline{|d|}$ //

(2)

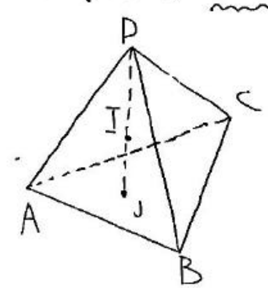
すべてDから始まるベクトルに変形．

$\overrightarrow{DI}-\overrightarrow{DO}$

$= \frac{\alpha(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DO})+\beta(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DO})+\gamma(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO})-\delta\overrightarrow{DO}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DI}=\frac{\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}+\gamma\overrightarrow{DC}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$

$\quad = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\cdot\underbrace{\frac{\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}+\gamma\overrightarrow{DC}}{\alpha+\beta+\gamma}}_{\overrightarrow{DJ}}$



△ABCに対するDの高さをhとおくと

$h:r=\alpha+\beta+\gamma+\delta:\delta$ ……①

ここで

$V=\delta\times h\times\frac{1}{3}$

$\therefore h=\frac{3V}{\delta}$

①より

$r=\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}h$

より

$r=\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\cdot\frac{3V}{\delta}$

$\quad = \underline{\frac{3V}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}$ //

(3) rはα，β，γ，δに関して対称なので，同様にどの三角形からのIの高さを出してもすべてrと等しくなるので，Iは四面体ABCDの内接球の中心である．

4

(1)

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = \underline{1}$$

(2)

$P_k(t)$

$= a\dfrac{n-k+1}{k} P_{k-1}(t)$

$= a\dfrac{n-k+1}{k}\, a\dfrac{n-k+2}{k-1} P_{k-2}(t)$

$= a\dfrac{n-k+1}{k}\, a\dfrac{n-k+2}{k-1} \cdots a\dfrac{n-k+k}{1} P_0(t)$

$= \dfrac{n!}{(n-k)!k!} a^k t^n$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(t)$

$= t^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k \cdot 1^{n-k}$

$= t^n (a+1)^n = 1 \quad (\because (1))$

$\therefore a+1 = \dfrac{1}{t}$

$\therefore \underline{a = \dfrac{1}{t} - 1}$

(3)

$P_k(t)$

$= {}_nC_k \left(\dfrac{1}{t} - 1\right)^k t^n$

$= {}_nC_k (1-t)^k t^{n-k}$

$P_k'(t)$

$= {}_nC_k \{-k(1-t)^{k-1} t^{n-k}$

$\qquad + (n-k)(1-t)^k t^{n-k-1}\}$

$= {}_nC_k (1-t)^{k-1} t^{n-k-1}$

$\qquad \{-kt + (n-k)(1-t)\}$

$= {}_nC_k (1-t)^{k-1} t^{n-k-1} (n-k-nt)$

t	$0 \cdots \frac{n-k}{n} \cdots 1$
$P_k'(t)$	$+ \quad 0 \quad -$
$P_k(t)$	$\nearrow \qquad \searrow$

$\therefore \underline{T_k = \dfrac{n-k}{n}}$

(4)

E

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} a^k t^n \cdot 1^{n-k-1}$

$= t^n (a+1)^{n-1}$

$= \underline{t}$

5

(1) $g(\alpha)$ が $f(x)=0$ の解ならば

$g(g(\alpha)) = \dfrac{-1}{\frac{-1}{\alpha+1}+1} = \dfrac{-\alpha-1}{\alpha}$

も解である. 今 α, $\dfrac{-1}{\alpha+1}$, $\dfrac{-\alpha-1}{\alpha}$

の少なくとも2つが等しい条件は

$\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

である.

(i) α が $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ または $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

であり, $f(x)=0$ がこの α 以外に解 β をもつとすると

$\alpha, \bar{\alpha}, \beta, g(\beta), g(g(\beta))$

が解となり3次方程式の解が高々3つであることに反する.

(ii) α が $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ または $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

のみを解にもつとすると

3解の実部の和が $-\dfrac{3}{2}$ となり

解と係数の関係から -1 であることに反する.

以上より $\alpha = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となること

はないので, α, $\dfrac{-1}{\alpha+1}$, $\dfrac{-\alpha-1}{\alpha}$ は

すべて異なる.

解と係数の関係より

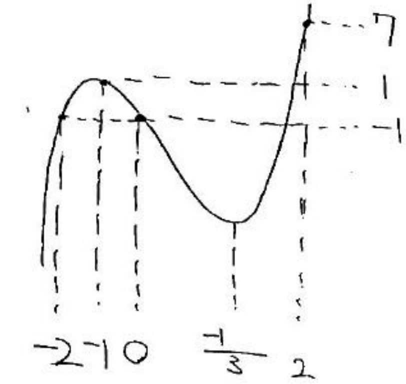
$$\begin{cases} \alpha + \dfrac{-1}{\alpha+1} + \dfrac{-\alpha-1}{\alpha} = -1 \\ \dfrac{-\alpha}{\alpha+1} + \dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)\alpha} + (-\alpha-1) = p \\ \alpha \dfrac{-1}{\alpha+1} \cdot \dfrac{-\alpha-1}{\alpha} = -q \end{cases}$$

解くと $\underline{p=-2,\ q=-1}$

(2)

$f(x) = 3x^2+2x-2$

$f(x)=0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$



$f(-2)=f(0)<0$

$f(1)>0,\ f(2)>0$ より)

3次方程式の解は高々3個なので

$-2<x<-1,\ -1<x<0,$

$0<x<2$

の範囲に1つずつ実数解をもつので $-2<x<2$ の範囲に3つ実数解をもつ.

(3) $\alpha=2\cos\theta$ とおくと

$\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1=0$ である.

$$2\cos 2\theta=4\cos^2\theta-2$$
$$=\alpha^2-2$$
$$=-\frac{1}{\alpha+1}$$

$$\left(\because\ (\alpha^2-2)(\alpha+1)=\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-2 = -1\right)$$

より $2\cos 2\theta$ も解である.

$$2\cos 3\theta=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$$
$$=\alpha^3-3\alpha$$
$$=-\alpha^2+2\alpha+1-3\alpha$$
$$=-\alpha^2-\alpha+1$$
$$=\frac{-\alpha-1}{\alpha}$$

$$\left(\begin{aligned}\because\ &(-\alpha^2-\alpha+1)\alpha\\ &=-\alpha^3-\alpha^2+\alpha\\ &=-2\alpha-1+\alpha=-\alpha-1\end{aligned}\right)$$

より $2\cos 3\theta$ も解である.

(4)

$2\cos\theta$ が $f(x)=0$ の解ならば $2\cos 2\theta$ も解である. 同様に弧度が倍されると考えると, $2\cos 4\theta$ も解であり, これが $2\cos 3\theta$ と等しいので

$$\cos 4\theta=\cos 3\theta$$
$$=\cos(2\pi k-3\theta)$$
$$(k\in\mathbb{Z})$$

$\therefore\ 4\theta=2\pi k-3\theta$

$\therefore\ \theta=\frac{2\pi k}{7}$

$0<\theta<\pi$ より

$\underline{\theta=\frac{2\pi}{7},\ \frac{4\pi}{7},\ \frac{6\pi}{7}}$