2017 筑波大学

[1]

(1)

連立

$\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3$

$=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$

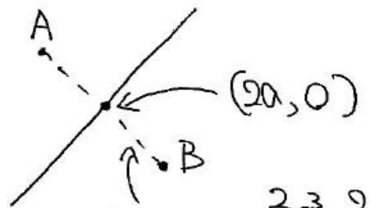
$\Leftrightarrow x^2-4ax+3a^2=0$

$\therefore x=a,3a$

$A(a,\frac{2}{3}a^3)$

$B(3a,-\frac{2}{3}a^3)$ //

(2)



$(傾き)=\frac{-\frac{2}{3}a^3-\frac{2}{3}a^3}{3a-a}$

$=-\frac{2}{3}a^2$

$l: y=\frac{3}{2a^2}(x-2a)$

$=\frac{3}{2a^2}x-\frac{3}{a}$ //

(3)

$l: 3x-2a^2y-6a=0$

$d=\frac{|-6a|}{\sqrt{9+4a^4}}$

$=\frac{6a}{\sqrt{4a^4+9}}$

$=\frac{6}{\sqrt{4a^2+\frac{9}{a^2}}}$

$\leqq\frac{6}{\sqrt{2\sqrt{4a^2\cdot\frac{9}{a^2}}}}$ $\because$(相加平均) $\geqq$(相乗平均)

$=\frac{6}{\sqrt{12}}=\sqrt{3}$

等号成立は $4a^2=\frac{9}{a^2}\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき

$a=\frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき最大をとる。//

[2]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+C$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$=3(x+\beta)(x-\beta)$

とできるので $a=0$ //, $b=-3\beta^2$.

$f(-1)=f(\beta)=-m$

$\Leftrightarrow -1+3\beta^2+C=\beta^3-3\beta^3+C=-m$ …①

これより

$2\beta^3+3\beta^2-1=0$

$\Leftrightarrow(\beta+1)(2\beta^2+\beta-1)=0$

$\Leftrightarrow(\beta+1)^2(2\beta-1)=0$

$\therefore \beta=\frac{1}{2}$ // ($\because 0<\beta<1$)

①に戻すと

$-\frac{1}{4}+C=-m$

また

$f(1)=1-3\cdot\frac{1}{4}+C$

$=\frac{1}{4}+C=m$

以上より $C=0$ // $m=\frac{1}{4}$ //

ちなみに $b=-\frac{3}{4}$ //

(2)

$-\frac{1}{4}\leqq g(x)\leqq\frac{1}{4}$

を満たすことをふまえれば

$$\begin{cases} h(-1)=-\frac{1}{4}-g(-1)\leqq 0 \\ h(-\beta)=\frac{1}{4}-g(-\beta)\geqq 0 \\ h(\beta)=-\frac{1}{4}-g(\beta)\leqq 0 \\ h(1)=\frac{1}{4}-g(1)\geqq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{3}{4}-p+q-r\leqq 0 \cdots \boxed{1} \\ \frac{3}{8}-\frac{p}{4}+\frac{q}{2}-r\geqq 0 \cdots \boxed{2} \\ -\frac{3}{8}-\frac{p}{4}-\frac{q}{2}-r\leqq 0 \cdots \boxed{3} \\ -\frac{3}{4}-p-q-r\geqq 0 \cdots \boxed{4} \end{cases}$$

$\boxed{1}+\boxed{4}\times(-1)$

$\frac{3}{2}+2q\leqq 0\Leftrightarrow\frac{3}{4}+q\leqq 0$

$\boxed{2}+\boxed{3}\times(-1)$

$\frac{3}{4}+q\geqq 0$

以上より

$\frac{3}{4}+q=0\Leftrightarrow q=-\frac{3}{4}$

これを代入すると

$$\begin{cases} -p-r\leqq 0 \\ -\frac{p}{4}-r\geqq 0 \\ -\frac{p}{4}-r\leqq 0 \\ -p-r\geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases} -p-r=0 \\ -\frac{p}{4}-r=0 \end{cases}$$

$\therefore p=r=0$

$\therefore h(x)=x^3-\frac{3}{4}x-(x^3-\frac{3}{4}x)$

$=0$ //

[3]

(1)

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)^2$

$\Leftrightarrow\ b_{n+1}=3b_n^2$

$n\geqq 2$のとき

$b_n\geqq 3b_{n-1}^2\geqq 0$

$n=1$のとき

$b_n=b_1=a_2-a_1=2\geqq 0$

より $b_n\geqq 0\ (n=1,2,\cdots)$

(2)

(i) $n=1$のとき $b_1=2$

(ii) $n=k$のとき一の位が2であるとすると

$b_k\equiv 2 \pmod{10}$

$n=k+1$のとき

$b_{k+1}=3b_k^2$

$\equiv 12 \pmod{10}$

$\equiv 2 \pmod{10}$

よりこのときも一の位は2.

(i)(ii)より $b_n\ (n=1,2,\cdots)$の一の位は2

(3)

(2)より

$a_{n+1}-a_n=b_n\equiv 2 \pmod{10}$

$\Leftrightarrow a_{n+1}\equiv a_n+2 \pmod{10}$

$\therefore a_n\equiv a_1+(n-1)2=2n-1 \pmod{10}$

$\therefore a_{2017}\equiv 4033 \pmod{10}$

$\equiv 3 \pmod{10}$

a_{2017}の一の位は $\underline{3}$

[4] (1)

$f(x)$

$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14$

$t=x+\frac{1}{x}$とおく

$=2(t^2-2)-9t+14$

$=2t^2-9t+10$

$=(2t-5)(t-2)=0$

$\therefore t=2,\frac{5}{2}$

$t=2$のとき

$x+\frac{1}{x}=2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$

$\therefore \underline{x=1}$

$t=\frac{5}{2}$のとき

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$

$\therefore \underline{x=\frac{1}{2},2}$

(2)

$f'(x)=4x-9+\frac{9}{x^2}-\frac{4}{x^3}$

$=\frac{4x^4-9x^3+9x-4}{x^3}$

$=\frac{(x^2-1)(4x^2-9x+4)}{x^3}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1,\frac{9\pm\sqrt{17}}{8}$

$(\because x>0)$

x	0	$\cdots$	$\frac{9-\sqrt{17}}{8}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{9+\sqrt{17}}{8}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x=\frac{9\pm\sqrt{17}}{8}$のときどちらも

$4x^2+4=9x$

$\therefore t=x+\frac{1}{x}=\frac{9x}{4x}=\frac{9}{4}$

より

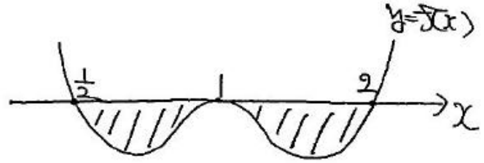
$f\left(\frac{9\pm\sqrt{17}}{8}\right)=2\,\frac{81}{16}-\frac{81}{4}+10=-\frac{1}{8}$

つまり

$x=\frac{9\pm\sqrt{17}}{8}$のとき極小値 $-\frac{1}{8}$

$\underline{x=1\text{のとき極大値 }0}$

(3)



$\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-f(x))\,dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2-14x+9\log|x|+\frac{2}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$

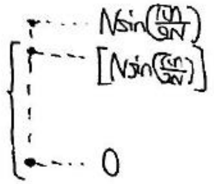
$=-\frac{16}{3}+18-28+9\log 2+1$

$-\left\{-\frac{1}{12}+\frac{9}{8}-7+9\log\frac{1}{2}+4\right\}$

$=\underline{18\log 2-\frac{99}{8}}$

[5]

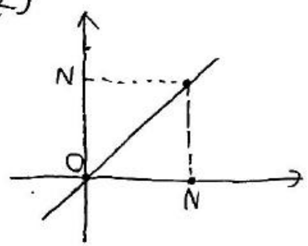
(1)



求める答えは

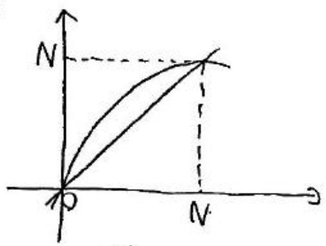
$$\left[N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right]-0+1$$
$$=\left[N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right]+1$$

(2)



$$A(N)$$
$$=\{1+(N+1)\}(N+1)\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$$

(3)



$$B(N)=\sum_{n=0}^{N}\left\{\left[N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right]+1\right\}.$$

$$N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)-1<\left[N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right]\leqq N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)$$

より

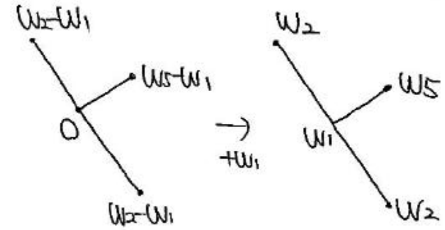
$$\sum_{n=0}^{N}N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)<B(N)\leqq\sum_{n=0}^{N}N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)+N+1$$
$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{N}N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)<B(N)\leqq\sum_{n=1}^{N}N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)+N+1$$
$$\Leftrightarrow\frac{N^2}{N}\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)<B(N)\leqq\frac{N^2}{N}\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)+N+1$$
$$\Leftrightarrow\frac{N^2}{A(N)}\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)<\frac{B(N)}{A(N)}\leqq\frac{N^2}{A(N)}\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)+\frac{N+1}{A(N)}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{N^2}{A(N)}\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{\pi}$$

[6]

(1)

$$\cos^2\alpha(w_2-w_1)^2=-\sin^2\alpha(w_5-w_1)^2$$
$$\Leftrightarrow\frac{(w_2-w_1)^2}{(w_5-w_1)^2}=-\tan^2\alpha$$
$$\Leftrightarrow\frac{w_2-w_1}{w_5-w_1}=\pm(\tan\alpha)i$$
$$=\tan\alpha\left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)$$



内角 $\angle P_5P_1P_2=\frac{\pi}{2}$

(2)

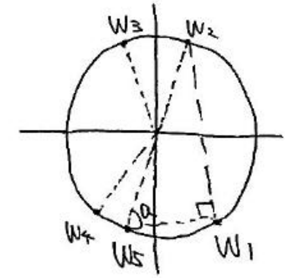
$$z^2-\sqrt{3}z+1=0$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$$

$P_1\sim P_5$ は反時計まわりに並ぶので

$$w_3=w_2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$w_4=-w_2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$=w_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$
$$=w_2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

(3)

$$w_3=\frac{\sqrt{3}+i}{2}w_2$$
$$w_4=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}w_2$$
$$w_5=-w_2$$
$$w_1=\{\cos(-2\alpha)+i\sin(-2\alpha)\}w_2$$
$$(\because\angle P_2OP_1=2\alpha)$$



$\angle P_5P_1P_2=\frac{\pi}{2}$ より P_2 と P_5 は結べば直径となる．$\angle P_2P_5P_1=\alpha$

より

$$P_5P_1=2\cos\alpha$$
$$P_2P_1=2\sin\alpha$$

つまり

$$S=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{6}+(2\cos\alpha)(2\sin\alpha)\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sin2\alpha$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\sin2\alpha$$

より

R^2

$= |iw_2 + \{\cos(-2a) + i\sin(-2a)\}w_2|^2$

$= |\cos 2a + (1-\sin 2a)i|^2 |w_2|^2$

$= \cos^2 2a + (1-\sin 2a)^2$

$= 2 - 2\sin 2a$

$\therefore R^2 + 2S$

$= 2 - 2\sin 2a + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sin 2a$

$= 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

つまり R^2+2S は a の値によらない.