2017 東京大 理系

第1問 (1)

$f(\theta)$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta$

$= \underline{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a}$ //

$f(\theta) - f(0)$

$= 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - 2a - b - 1$

$= (x-1)\{4x^2 + (2a+4)x + 2a + b + 1\}$

$g(\theta)$

$= \underline{4x^2 + (2a+4)x + 2a + b + 1}$ //

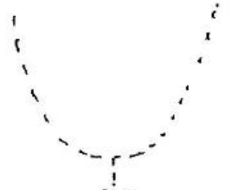
(2)

$g(\theta)$

$= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{(a+2)^2}{4} + 2a + b + 1$

$= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a + b$

$(-1 < x < 1)$



$-\frac{a+2}{4}$

最小値が存在するための必要条件は

$-1 < -\frac{a+2}{4} < 1$

$\Leftrightarrow -4 < a+2 < 4$

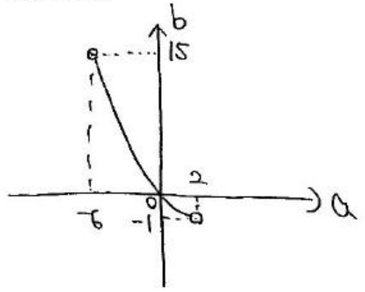
$\Leftrightarrow \underline{-6 < a < 2}$ //

このとき

$-\frac{a^2}{4} + a + b = 0$

$\Leftrightarrow \underline{b = \frac{1}{4}a^2 - a = \frac{1}{4}(a-2)^2 - 1}$ //

図示すると



第2問.

(1)

P(6秒後に$y=x$上にある)

$= P$(〃 $y-x=0$ 上にある)

横たってy−xが+1にある確率 $\frac{1}{2}$

〃 −1にある確率 $\frac{1}{2}$

より

$= {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{2^6} = \underline{\frac{5}{16}}$ //

(2)

P(6秒後に原点)

$= P(\uparrow\times3, \downarrow\times3)$

$+ P(\rightarrow\times3, \leftarrow\times3)$

$+ P(\uparrow\times2, \downarrow\times2, \rightarrow\times1, \leftarrow\times1)$

$+ P(\rightarrow\times2, \leftarrow\times2, \uparrow\times1, \downarrow\times1)$

$= {}_6C_3\left(\frac{1}{4}\right)^6 \times 2$

$+ \frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \times 2$

$= (20+180)\frac{1}{2^{11}}$

$= \underline{\frac{25}{256}}$ //

第3問

(1)

$|z - \alpha| = |z| \quad (z \neq 0)$

$\downarrow z = \frac{1}{w}$

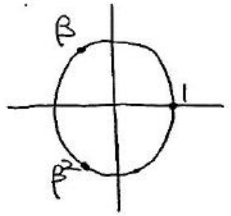
$\left|\frac{1}{w} - \alpha\right| = \left|\frac{1}{w}\right| \quad (w \neq 0)$

$\Leftrightarrow |1 - \alpha w| = 1$

$\Leftrightarrow \left|w - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$

wは$\frac{1}{\alpha}$が中心で半径$\frac{1}{|\alpha|}$の円. ただし$w=0$を除く.

(2)



$\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\beta^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

より

$z = -\frac{1}{2} + bi \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq b \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

とおく.

$w = \frac{1}{-\frac{1}{2} + bi} \times \frac{-\frac{1}{2} - bi}{-\frac{1}{2} - bi}$

$= \frac{-\frac{1}{2} - bi}{\frac{1}{4} + b^2}$

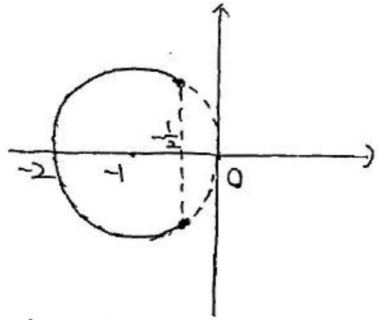
$= \frac{-2 - 4bi}{1 + 4b^2} = x + yi$ とおく.

$x = \frac{-2}{1+4b^2}, \quad y = \frac{-4b}{1+4b^2}$

$(x+1)^2 + y^2$

$= \frac{(-1+4b^2)^2 + 16b^2}{(1+4b^2)^2} = 1$

$\left(-2 \leqq x \leqq -\frac{1}{2}\right)$



$|w+1|=1$ かつ $|w|\geqq 1$

第4問.

(1)

$a_1 = p - \frac{1}{p}$

$= 2+\sqrt{5} - \frac{1}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \underline{4}$ //

$a_2 = p^2 + \frac{1}{p^2}$

$= \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2$

$= \underline{18}$ //

(2)

a_{n+1}

$= p^{n+1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1}$

$= \left\{p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n\right\}\left\{p + \left(-\frac{1}{p}\right)\right\}$

$+ p^{n-1} - \left(-\frac{1}{p}\right)^n p$

$= a_n a_1 + a_{n-1}$

$\therefore a_1 a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$

(3)

(i) $n=1, 2$ のとき (1) より a_n は自然数である.

(ii) $n=k, k+1$ のとき自然数であると仮定する.

$n=k+2$ のとき

a_{k+2}

$= a_k + a_1 a_{k+1}$

より a_{k+2} も自然数となる.

(i)(ii) よりすべての自然数 n において a_n は自然数.

(4)

$a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$

$$\begin{array}{r} 4 \\ a_n \enclose{longdiv}{a_{n+1}} \\ \underline{4a_n} \\ a_{n-1} \end{array}$$

より

$\gcd(a_{n+1}, a_n)$

$= \gcd(a_n, a_{n-1})$

$= \gcd(a_{n-1}, a_{n-2})$

$= \cdots$

$= \gcd(a_2, a_1) = \underline{2}$ //

第5問. (1)

$y = ax + b$ が C と D の共通接線.

$x^2 + k = ax + b$

$\Leftrightarrow x^2 - ax + k - b = 0$

$D = a^2 - 4(k-b) = 0 \cdots ①$

$x = (ax+b)^2 + k$

$\Leftrightarrow 0 = a^2x^2 + (2ab-1)x + b^2 + k$

$D = (2ab-1)^2 - 4a^2(b^2+k)$

$= -4ab + 1 - 4a^2k = 0 \cdots ②$

① で $4b = 4k - a^2$ を ② に代入

$-a(4k - a^2) + 1 - 4a^2k = 0$

$(-4a^2 - 4a)k = -a^3 - 1 \cdots ③$

$\Leftrightarrow k = \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{4a(a+1)} \quad (a \neq 0, -1)$

$\therefore \underline{k = \frac{a^2-a+1}{4a}}$ //

$4b = 4k - a^2$

$= \frac{a^2-a+1}{a} - \frac{a^3}{a}$

$\therefore \underline{b = \frac{-a^3+a^2-a+1}{4a}}$ //

(2)

$a=2$ のとき $k = \frac{3}{8}$

このとき

$k = \frac{3}{8} = \frac{a^2-a+1}{4a}$

$\Leftrightarrow 12a = 8a^2 - 8a + 8$

$\Leftrightarrow 0 = 8a^2 - 20a + 8$

$\Leftrightarrow 0 = 2a^2 - 5a + 2$

$\therefore a = 2, \frac{1}{2}$

また $a = -1$ のとき ③ は常に成立.

故に

$a=2$ のとき $b = -\frac{5}{8}$

$a = \frac{1}{2}$ のとき $b = \frac{5}{16}$

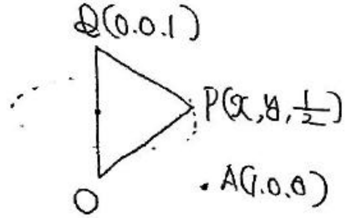
$a = -1$ のとき

$k = \frac{3}{8}$ を ① に代入して $b = \frac{1}{8}$

よって共通接線は3本存在.

第6問.

(1)



$\triangle OPQ$の高さが$\frac{\sqrt{3}}{2}$よりPのx座標の範囲は

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

また

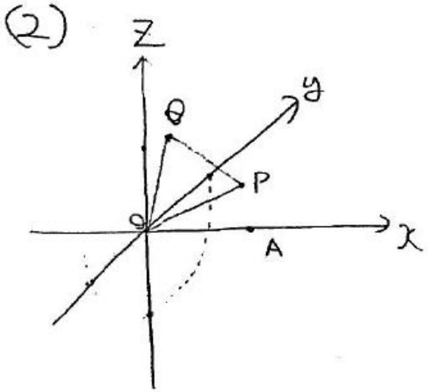
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta$$

$\Leftrightarrow \cos\theta = x$

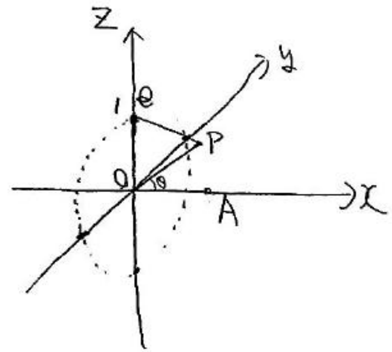
$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ となるので

$\underline{30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ}$

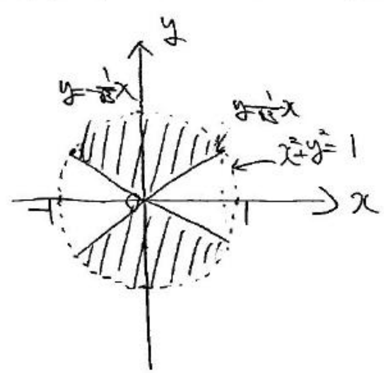
(2)



立体Kを考えるためにQ(0.0.1)で固定して考える.



この状態で線分OPをx軸のまわりに1回転してできた円錐面を$30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$で動かしてできた領域が立体Kとなる.体積は



上の斜線部分の領域をx軸のまわりに1回転すればいい.

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1-x^2-\frac{1}{3}x^2\right)\pi\, dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1-\frac{4}{3}x^2\right) dx$$

$$= 2\pi\left[x-\frac{4}{9}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= 2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$