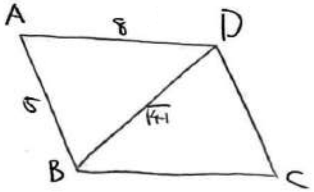
# 2017 北里大(薬)

Ⅰ

(1)




余弦定理より

$$\cos\angle BAD=\frac{5^2+8^2-41}{2\cdot5\cdot8}$$

$$=\frac{3}{5}$$

$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{d}=5\cdot8\cdot\cos\angle BAD$

$=24\cdots\underline{7}$

$\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{d}$ より

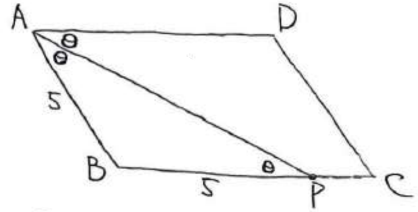
$|\overrightarrow{AC}|^2=|\vec{b}+\vec{d}|^2$

$=|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2$

$=25+48+64=137$

$\therefore\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{137}\cdots\underline{8}$

(2)




$\overrightarrow{AP}=\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{d}\cdots\underline{10}$

(3) BQが△ABPの高さのとき
BQが最小. 上の図の角をθ
とおく

$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=\frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow\ \sin^2\theta=\frac{1}{5}$

$\therefore\ \min|\overrightarrow{BQ}|=5\sin\theta$

$=\sqrt{5}\cdots\underline{5}$

Ⅱ

$f(x)=\log_2(4-x)(2+x)$

$=\log_2(-x^2+2x+8)$

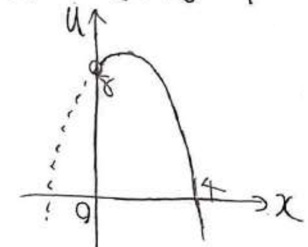
$=\log_2\{-(x-1)^2+9\}$

(1)
$f(x)=a$が異なる2つの実数解を
もつためには

$a<\log_2 9=2\log_2 3$

$\cdots\underline{5}$

(2) $u=-(x-1)^2+9$




1つのuの値に対して2つの正のx
の値が対応するのは

$8<u<9$

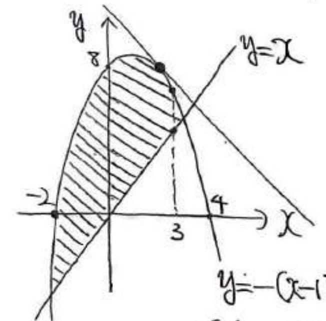
$f(x)=a$が異なる2つの正の実数解
をもつためには

$\log_2 8<a<\log_2 9$

$\therefore\ 3<a<2\log_2 3\cdots\underline{1}$

(3) $x\leqq y\leqq 2^{f(x)}$

$\Leftrightarrow\ x\leqq y\leqq-(x-1)^2+9$




$y=-(x-1)^2+9$

$(y'=-2(x-1))$

$\Downarrow$

$-2(x-1)=-1$

$\therefore\ x=\frac{3}{2}$

$x=\frac{3}{2}$のとき $y=-\frac{1}{4}+9=\frac{35}{4}$

このとき$x+y$が最大.

$\max x+y=\frac{6}{4}+\frac{35}{4}=\frac{41}{4}\cdots\underline{10}$

(4) 領域の$x=k$のときの格子点は

$-(k-1)^2+9-k+1$

$=-k^2+k+9$ コ

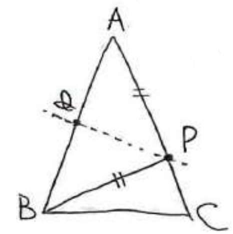
求める格子点の個数は

$$\sum_{k=-2}^{3}(-k^2+k+9)$$

$=3+7+9+9+7+3$

$=38\cdots\underline{10}$

Ⅲ




(1)
$\angle BPC=\frac{2}{5}\pi\cdots\underline{4}$

$\angle BCP=\frac{2}{5}\pi$なので△BCPは
二等辺三角形.

$\therefore\ BC=BP=AP=1$

$CP=x$とおくと$\triangle ABC\sim\triangle BCP$
より

$1+x : 1 = 1 : x$

$\Leftrightarrow (1+x)x = 1$

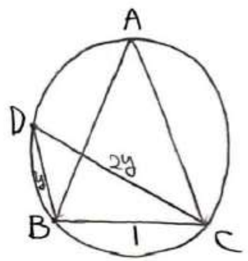
$\Leftrightarrow x^2+x-1=0$

$\therefore x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdots \underline{5}$

$\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} \cdots \underline{4}$

(2)




BD$=y$, CD$=2y$とおいて

余弦定理

$1^2 = y^2+4y^2-2\cdot y\cdot 2y\cos\dfrac{\pi}{5}$

$\Leftrightarrow 1 = y^2(5-(\sqrt{5}+1))$

$\Leftrightarrow y^2 = \dfrac{1}{4-\sqrt{5}} = \dfrac{4+\sqrt{5}}{11}$

$\therefore BD = \sqrt{\dfrac{4+\sqrt{5}}{11}} \cdots \underline{4}$

$S = \dfrac{1}{2}AB^2\sin\dfrac{\pi}{5}$

$T = \dfrac{1}{2}y\cdot 2y\sin\dfrac{\pi}{5}$ より

$\dfrac{T}{S}$

$= \dfrac{2y^2}{AB^2}$

$= \dfrac{2\frac{4+\sqrt{5}}{11}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}$

$= 2\cdot\dfrac{4+\sqrt{5}}{11}\cdot\dfrac{4}{6+2\sqrt{5}}$

$= \dfrac{4}{11}\cdot\dfrac{4+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

$= \dfrac{1}{11}(4+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$

$= \dfrac{7-\sqrt{5}}{11} \cdots \underline{5}$

IV

(1)

1 1 1 1 1 2
1 1 1 1 2 2
⋮
1 2 2 2 2 2

5通り $\cdots \underline{2}$

(2)

1 2 3

○ ○|○ ○|○ ○

結果の分配を○×6, |×2の同じものを含む順列で表現.

$\dfrac{8!}{6!2!} = 28$通り $\cdots \underline{4}$

(3) (2)と同様に考えるが$a_1$は3通り

$3\times\dfrac{7!}{5!2!} = 63$通り $\cdots \underline{9}$

(4)

$6 \leqq a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 \leqq 18$

(i) 和が10のとき

2つ1で, 4つ2のとき

${}_6C_2 = 15$

3つ1で, 2つ2で, 1つ3のとき

$\dfrac{6!}{3!2!1!} = 60$

4つ1で, 2つ3のとき

${}_6C_2 = 15$

(ii) 和が15のとき

1つ1で, 1つ2で, 4つ3のとき

$\dfrac{6!}{1!1!4!} = 30$

3つ2で, 3つ4のとき

$\dfrac{6!}{3!3!} = 20$

すべてたすと140通り $\cdots \underline{8}$

V

(1)

$f(x)-g(x)$

$= x^3+(3-3k)x^2-12kx+16$

$= h(x)$

$h'(x)$

$= 3x^2+(6-6k)x-12k$

$h'(x)=0$の判別式Dとすると

$\dfrac{D}{4} = (3-3k)^2-3(-12k)$

$= 9(k^2-2k+1+4k) > 0$

であることが極値をもつために必要.

$k^2+2k+1>0$

$\therefore (k+1)^2>0$

$\therefore k \neq -1 \cdots \underline{3}$

$h'(x) = 3\{x^2+(2-2k)x-4k\}$

$= 3(x-2k)(x+2)$

$x=-2$と$2k$で極値 $\cdots \underline{10}$

(2)

$y=f(x)$の$x=-1$での接線は

$y'=3x^2+6x$より

$y=-3(x+1)+18$

$=-3x+15$

これと$y=g(x)$を連立すると

$-3x+15=3kx^2+12kx$

$\Leftrightarrow 0=kx^2+(4k+1)x-5$

$D=(4k+1)^2-4k(-5)$

$=16k^2+28k+1=0$

$\therefore k=\dfrac{-14\pm\sqrt{196-16}}{16}$

$=\dfrac{-14\pm 6\sqrt{5}}{16}$

$=-\dfrac{7\pm 3\sqrt{5}}{8} \cdots \underline{8}$

(3) $f(x)-g(x)=h(x)=0$

の実数解が2コ.

$\downarrow$

$h(x)$の極大値または極小値が

0.

$\downarrow$

$h(2k)=8k^3+12k^2-12k^3-24k^2+16$

$=-4k^3-12k^2+16=0$

$\Leftrightarrow k^3+3k^2-4=0$

$\Leftrightarrow (k-1)(k^2+4k+4)=0$

$\Leftrightarrow k=1,-2$

または

$h(-2)=-8+12-12k+24k+16$

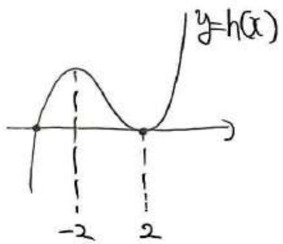
$=12k+20=0$

$\therefore k=-\dfrac{5}{3}$

つまり小さい順に

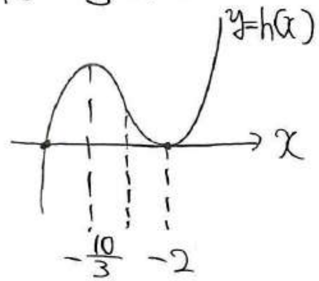
$k=-2,-\dfrac{5}{3},1 \cdots \underline{4,4,7}$

(4) $k=1$のとき



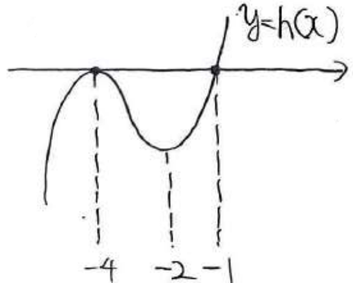

共有点のx座標がすべて−1より小さくはならない.

$k=-\dfrac{5}{3}$のとき




これは−1より小さいのでOK.

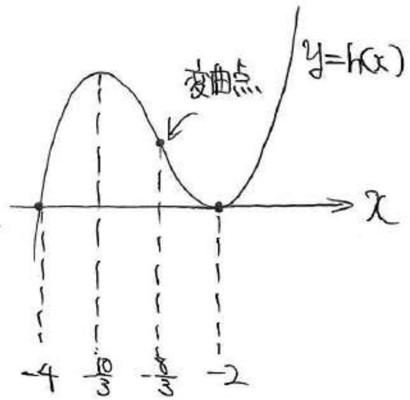
$k=-2$のとき




共有点のx座標が−4と−1なので不適.

$k=-\dfrac{5}{3}$のとき

$h(x)=0 \Leftrightarrow x=-4,-2$




求める面積は

$\displaystyle\int_{-4}^{-2}\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-4}^{-2}h(x)dx$

$=\displaystyle\int_{-4}^{-2}(x+4)(x+2)^2dx \cdots ☆$

$=\dfrac{1}{12}\{-2-(-4)\}^4$ ← $\frac{1}{12}$公式

$=\dfrac{16}{12}$

$=\dfrac{4}{3} \cdots \underline{4}$

※

☆は記述式なら

$\displaystyle\int_{-4}^{-2}\{(x+2)+2\}(x+2)^2dx$

$=\displaystyle\int_{-4}^{-2}\{(x+2)^3+2(x+2)^2\}dx$

とするか,☆で部分積分(数III)がオススメです.