2017 慶應 薬

[I]

(1)

$$\log_2 \frac{7}{y+5} = \log_2 \frac{4}{x+2}$$

真数条件 $x>-2,\ y>-5$

(i) $y=3$ のとき

$$\frac{7}{8}=\frac{4}{x+2}$$

$\Leftrightarrow 7x+14=32 \quad \therefore \underline{x=\frac{18}{7}}_{//}$

(ii) $7(x+2)=4(y+5)$

$\Leftrightarrow 7x-4y=6 \quad x, y \in \mathbb{Z}$

解くと

$x=4k+2,\ y=7k+2\ (k\in\mathbb{Z})$

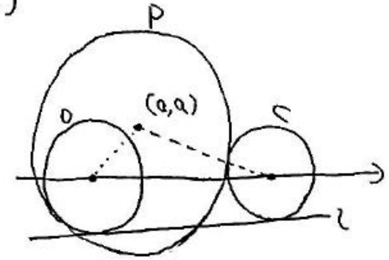
$1000<2^{7k+2-4k-2}<5000$

$\Leftrightarrow 1000<2^{3k}<5000$

$\therefore k=4$

$\therefore \underline{x=18,\ y=30}_{//}$

(2)



円Pの半径に関して

$\sqrt{2}a+3=\sqrt{(5\sqrt{2}-a)^2+a^2}-2$

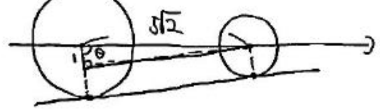
$\Leftrightarrow \sqrt{2}a+5=\sqrt{2a^2-10\sqrt{2}a+50}$

$\downarrow$ 2乗

$2a^2+10\sqrt{2}a+25=2a^2-10\sqrt{2}a+50$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{2}a=25$

$\therefore a=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\underline{\frac{5\sqrt{2}}{8}}_{//}$



$\cos\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}} \quad \tan\theta=7$

より

$l: y=-\frac{1}{\tan(-\theta)}x+b=\frac{1}{7}x+b$

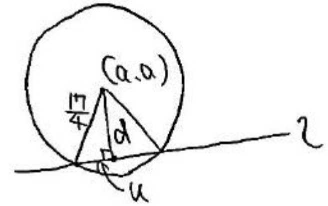
$\Leftrightarrow 0=x-7y+7b$ とおける.

これと原点との距離が3より

$$\frac{|7b|}{\sqrt{1+49}}=3$$

$$|b|=\frac{15\sqrt{2}}{7}$$

$b<0$ より $l: \underline{y=\frac{1}{7}x-\frac{15\sqrt{2}}{7}}_{//}$



$$d=\frac{|a-7a-15\sqrt{2}|}{\sqrt{1+49}}$$

$=\frac{1}{5\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{30\sqrt{2}}{8}+15\sqrt{2}\right)$

$=\frac{1}{5}\left(\frac{15}{4}+15\right)=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$

$u=\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^2-\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{16}}=2$

求める長さは $2u=\underline{4}_{//}$

(3)

$\{a_n\}: 1,2,4,7,8,11,13,14,16,17,\cdots$

(i) $a_5=\underline{8}_{//},\ a_{10}=\underline{17}_{//}$

$a_{k+8}=a_k+\underline{15}_{//}$

(ii) 最初から8コずつの群に分ける.

(第1群の和) $=60$

(第k群 〃) $=60+(k-1)120$

$=120k-60$

(第1～k群の総和)

$=(60+120k-60)\times k\times\frac{1}{2}$

$=60k^2$

$k=5$ のとき 1500. $k=6$ のとき 2160

第6群

$76,77,79,82,83,86,88,89$

↑ 3の和が min M.

$\therefore \min M=\underline{47}_{//}$

(4)

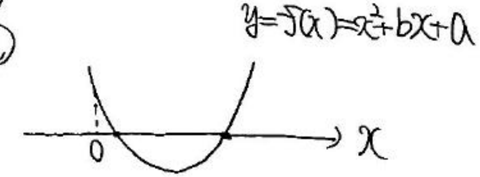
(i) 解と係数より

$$\begin{cases} -a=-k-k+4 \\ b=(-k)(-k+4) \end{cases}$$

$\therefore \underline{a=2k-4,\ b=k^2-4k}_{//}$

(ii)

①

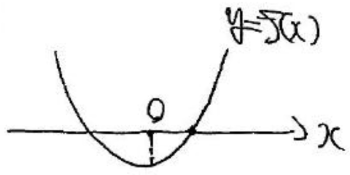


$$\begin{cases} \text{端}\ f(0)=a=2k-4\geqq 0 \\ \text{軸}\ -\frac{b}{2}>0 \Leftrightarrow k^2-4k<0 \\ \text{判}\ b^2-4a\geqq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\geqq 2 \\ 0<k<4 \\ (k^2-4k)^2-4(2k-4)\geqq 0 \end{cases}$$

$k=2,3$

②



端 $f(0)=a=2k-4<0$

$\therefore k<2$

$\therefore k=1$

①, ②より $k=1,2,3$

$a+b=k^2-2k-4$

$=(k-1)^2-5 \quad (k=1,2,3)$

$a+b$が最大 $\Leftrightarrow k=3 \Leftrightarrow b=-3$

$\therefore$ 最小 $\Leftrightarrow k=1 \Leftrightarrow b=-3$ //

[II]

(1)

A→O→B→D→E→C→G→F
A→O→B→D→F→E→C→G
A→O→B→D→C→E→F→G
A→O→B→D→C→G→F→E

の4つ //

(2)

(i) 辺BCをもつとき

A→O→B→C→D→E→F→G
A→O→B→C→E→D→F→G
A→O→B→C→G→F→E→D

の3つ、

(ii) 辺BEをもつとき

A→O→B→E→C→G→F→D

の1つ

(iii) 辺BGをもつとき

A→O→B→G→C→D→E→F
A→O→B→G→C→E→D→F
A→O→B→G→C→E→F→D
A→O→B→G→F→E→C→D

の4つ、

以上より合計は $4+3+1+4=12$

だが $y=x$に関して対称なものを2重

カウントしているので 6つ //

(3)

常に近い周りの点を選択。

A→O→B→Eと行くものは最小でない。

A→O→B→C→D→E→F→G

の周りは

$1+1+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{2}+4+4$

$=\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{10}+10$.

A→O→B→D→E→C→G→F

の周りは

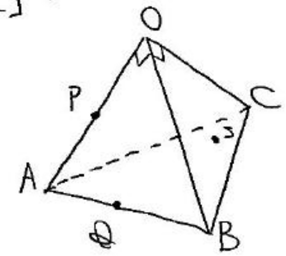
$1+1+\sqrt{5}+\sqrt{2}+4+4+4$

$=\sqrt{5}+\sqrt{2}+14$

求める長さは前者で

$\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{10}+10$ //

[III]



(1)

$\overrightarrow{CS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CO}$

(2)

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot AQ\sin 45^\circ=\frac{75}{4}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}AQ=15 \quad \therefore AQ=\frac{15}{\sqrt{2}}=\frac{15\sqrt{2}}{2}$

$AB=10\sqrt{2}$より $AQ:QB=3:1$

QはABを3:1に内分。 //

(3) Sは△OBCの重心より

$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AS}$とおく

$=\frac{t}{3}\overrightarrow{AO}+\frac{t}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{2t}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{4t}{9}\overrightarrow{AQ}+\frac{t}{3}\overrightarrow{AC}$

Rは平面CPQ上の点にあるので

$\frac{2t}{3}+\frac{4t}{9}+\frac{t}{3}=1$

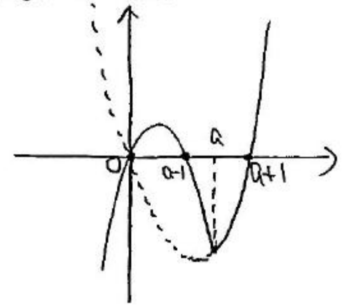
$\therefore t=\frac{9}{13}$

$\therefore \overrightarrow{AR}=\frac{9}{13}\overrightarrow{AS}$ //

[IV]

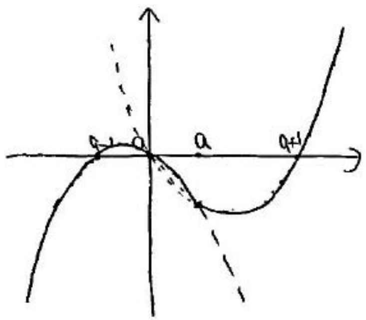
$$f(x)=\begin{cases} x^2-(a+1)x & (x\geqq a)\\ -x^2+(a-1)x & (x<a)\end{cases}$$

(i) $a\geqq 1$のとき



$\min f(x)=f(a)=-a$

(ii) $a\leqq 1$のとき



$\min f(x)=f\left(\frac{a+1}{2}\right)$

以上より

$a=\frac{1}{2}$のとき $\min f(x)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{-9}{16}$ //

$a=\frac{3}{2}$: $\min f(x)=\frac{-3}{2}$ //

(2)

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right)=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-(a+1)\frac{a+1}{2}$$
$$=-\frac{(a+1)^2}{4}$$
$$=\frac{-1}{4}a^2-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}$$ //

(3) $0\leqq a\leqq 1$のとき

$S(a)$

$$=\int_0^a\{0-(-x^2+(a-1)x)\}dx$$
$$+\int_a^1\{0-(x^2-(a+1)x)\}dx$$
$$=\int_0^a(x^2-ax)dx+\int_0^a x\,dx$$
$$+\int_a^1(-x^2+ax)dx+\int_a^1 x\,dx$$
$$=-\frac{a^3}{6}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2\right]_a^1+\int_0^1 x\,dx$$
$$=-\frac{a^3}{6}-\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{-1}{3}a^3+\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}$$ //

(4)

$1\leqq a\leqq 2$のとき

$S(a)$

$$=\int_0^{a-1}\{-x^2+(a-1)x\}dx$$
$$+\int_{a-1}^1\{x^2-(a-1)x\}dx$$
$$=\frac{1}{6}(a-1)^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a-1}{2}x^2\right]_{a-1}^1$$
$$=\frac{1}{6}(a-1)^3+\frac{1}{3}-\frac{a-1}{2}$$
$$-\frac{1}{3}(a-1)^3+\frac{1}{2}(a-1)^3$$
$$=\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{a}{2}+\frac{5}{6}$$

$$S'(a)=\begin{cases}-a^2+\frac{1}{2} & (0\leqq a\leqq 1)\\ (a-1)^2-\frac{1}{2} & (1\leqq a\leqq 2)\end{cases}$$

a	$0\cdots\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots 1\cdots 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots 2$
$S'(a)$	$+\ 0\ -\ \ -\ 0\ +$
$S(a)$	↗ ↘ ↘ ↗

以上より $a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ // で最小