2017 慈恵医大

1.

(1) P(5点)

$= P(a+b<c$ かつ $a+b+c=5)$

$5=a+b+c<2c$

$\therefore c>\frac{5}{2}$

$= P(a=b=1,\ c=3)$

$= \frac{1}{216}$ //

P(6点)

$= P(a+b<c$ かつ $a+b+c=6)$

$\quad + P(a=b=c=1)$

$= P(c=4)+\frac{1}{216}$

$= \frac{1}{216}+\frac{1}{216}=\frac{2}{216}$

P(7点)

$= P(c=4)+P(c=5)$

$= \frac{2}{216}+\frac{1}{216}=\frac{3}{216}$

P(8点)

$= P(c=5)+P(c=6)$

$\quad +P(a+b\geqq c$ かつ $a+b+c=4)$

$= \frac{2}{216}+\frac{1}{216}+P(a=b=1,\ c=2)$

$\quad +P(a+b=3,\ c=1)$

$= \frac{3}{216}+\frac{1}{216}+\frac{2}{216}$

$= \frac{6}{216}$

P(8点以下)

$= \frac{1+2+3+6}{216}=\frac{1}{18}$ //

(2)

$\sin B=\frac{4}{5}$

$\sin C=\frac{12}{13}$

より

$b=2R\sin B=\frac{8R}{5}=\frac{104R}{65}$

$c=2R\sin C=\frac{24R}{13}=\frac{120R}{65}$

$\sin A=\sin(180^\circ-B-C)$

$\quad =\sin(B+C)$

$\quad =\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}$

$\quad =\frac{56}{65}$

$a=2R\sin A=\frac{112R}{65}$

$\therefore a:b:c=14:13:15$

$a=14k,\ b=13k,\ c=15k$

$\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{r}{2}(a+b+c)$

$\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{15}^{3}k\cdot 14k\cdot\frac{4}{\cancel{5}}=42k$

$84k^2=42k$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

辺$BC=a=7$ //

$\triangle ABC=42k=21$ //

2.

(i) $x\geqq e$ のとき

$f(x)$

$=\int_x^{mx}\frac{t-e}{t}dt$

$=\left[t-e\log t\right]_x^{mx}$

$=mx-e\log mx-x+e\log x$

$=(m-1)x-e\log m$

(ii) $x\leqq e\leqq mx$

$\Leftrightarrow \frac{e}{m}\leqq x\leqq e$ のとき

$f(x)$

$=\int_e^{mx}\frac{t-e}{t}dt+\int_x^{e}\frac{e-t}{t}dt$

$=\left[t-e\log t\right]_e^{mx}+\left[e\log t-t\right]_x^{e}$

$=mx-e\log mx-e\log x+x$

$\quad -2(e-e)$

$=(m+1)x-2e\log x-e\log m$

(iii) $x\leqq\frac{e}{m}$ のとき

$f(x)=-(m-1)x+e\log m$

(ii)のとき

$f'(x)=m+1-\frac{2e}{x}$

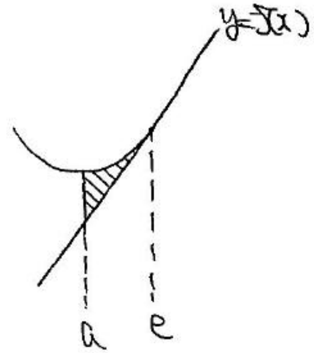
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2e}{m+1}$

増減表は

x	$0\ \cdots\ \frac{e}{m}\ \cdots\ \frac{2e}{m+1}\ \cdots\ e\ \cdots$
$f'(x)$	× − 1−m − + m+1 +
$f(x)$	× ↘ ↘ ↗ ↗

これより $a=\frac{2e}{m+1}$ //

(2)



$S(m)$

$= \int_a^e \{(m+1)x - 2e\log x - e\log m$

$\qquad - (m-1)x + e\log m\}dx$

$= \int_a^e (2x - 2e\log x)dx$

$= [x^2 - 2ex\log x + 2ex]_a^e$

$= e^2 - a^2 + 2ea\log a - 2ea$

$= e^2 - \left(\frac{2e}{m+1}\right)^2 + \frac{4e^2}{m+1}\log\frac{2e}{m+1} - \frac{4e^2}{m+1}$

$= e^2 - \left(\frac{2e}{m+1}\right)^2$

$\qquad + \frac{4e^2}{m+1}\left(\log 2e - \log(m+1) - 1\right)$

$\lim_{m\to\infty} S(m) = \underline{e^2}$

3.

(1)

与式より c^2がaの倍数より

cもaの倍数. $c=ak$ $(k\in\mathbb{N})$

とおくと

$a(ab-p^2) = a^2k^2$

$\Leftrightarrow ab - p^2 = ak^2$

$\Leftrightarrow a(b-k^2) = p^2$

同様に $p = al$ $(l\in\mathbb{N})$

とおける. pもaも素数なので

$l=1$となるから $p=a$となる.

$a(b-k^2) = a^2$

$\Leftrightarrow b - k^2 = a$

$\Leftrightarrow b = a + k^2$

また

$a + k^2 = b \leqq 2c = 2ak$

$\Leftrightarrow k^2 - 2ak \leqq -a$

$\Leftrightarrow (k-a)^2 \leqq a(a-1)$

$\therefore k - a \leqq a - 1$

$\therefore 1 \leqq k \leqq 2a - 1 = 2p - 1$

よって求める個数は $\underline{2p-1\text{個}}$

(2)

$b = a + k^2$, $c = ak$

より a, b, cの最大公約数が

1になるには k^2がaの倍数ではない,

つまりkがaの倍数でなければよい.

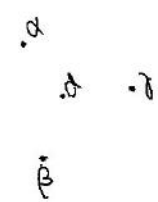
(1)の中でkがaの倍数になるの

は $k=a$のときだけなので求める

個数は $\underline{k=2p-2\text{個}}$

4.

$$\begin{cases} \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = d & d\in\mathbb{R} \\ \alpha\beta\gamma = -1 \\ \frac{\alpha-d}{\gamma-d} = \frac{\beta-d}{\alpha-d} \end{cases}$$



$(\alpha-d)^2 = \beta\gamma - d(\beta+\gamma) + d^2$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha d = \beta\gamma - d(\beta+\gamma)$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - 2d\alpha^2 = \underbrace{\alpha\beta\gamma}_{-1} - d(3d-\alpha)\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - 3d\alpha^2 + 3d^2\alpha + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha-d)^3 + d^3 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha-d)^3 = -1 - d^3 < 0$

$(\because d > -1)$

$|\alpha - d|^3 = 1 + d^3$

$\therefore l = |\alpha - d| = \underline{(1+d^3)^{\frac{1}{3}}}$

(2)

(1)より

$\alpha - d = -(1+d^3)^{\frac{1}{3}} < 0$

$\alpha = d - (1+d^3)^{\frac{1}{3}} < 0$

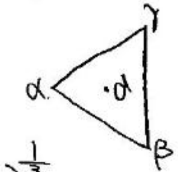
(1)ではβもγもこのように表せる.

α, β, γがすべて実数になることはなく

$-\pi \leqq \arg\alpha < \arg\beta < \arg\gamma < \pi$

より $\arg\alpha = -\pi$

となるしかない.



$\therefore \underline{\alpha = d - (1+d^3)^{\frac{1}{3}}}$

$\beta - d = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\alpha - d)$

$\therefore \underline{\beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+d^3)^{\frac{1}{3}} + d}$

$\gamma - d = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\alpha - d)$

$\therefore \underline{\gamma = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+d^3)^{\frac{1}{3}} + d}$