2017 北海道大 理系前期

$\boxed{1}$

(1)

a
$= (n+k)^2 - n(n+1)$
$= k^2 + 2nk - n$

ここで

$2nk - n - (2k-1)$
$= 2k(n-1) - (n-1)$
$= (2k-1)(n-1) \geqq 0$
$(\because k, n \in \mathbb{N})$

$\therefore 2nk - n \geqq 2k - 1$ $\quad +k^2$
$\therefore a \geqq k^2 + 2k - 1$

(2)

$\begin{cases} n(n+1) + 14 = (n+k)^2 \cdots ① \\ 14 \geqq k^2 + 2k - 1 \end{cases}$

$k^2 + 2k - 15 \leqq 0$
$\Leftrightarrow (k+5)(k-3) \leqq 0$
$\therefore 1 \leqq k \leqq 3 \quad (\because k \in \mathbb{N})$

(i) $k=1$ のとき ①は
$n^2 + n + 14 = n^2 + 2n + 1$
$\therefore \underline{n = 13}$

(ii) $k=2$ のとき ①は
$n^2 + n + 14 = n^2 + 4n + 4$
これを満たす自然数 n は存在しない。

(iii) $k=3$ のとき ①は
$n^2 + n + 14 = n^2 + 6n + 9$
$\therefore \underline{n = 1}$

$\boxed{2}$

(1)

$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x$
$= x\sin x$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1+\pi$	$\searrow$	$1-2\pi$

$x = \pi$ のとき最大値 $1+\pi$
$\underline{x = 2\pi \quad 〃 \quad 最小値 \ 1-2\pi}$

(2)

$\int (1 + \sin x - x\cos x)\,dx$
$= x - \cos x - x\sin x - \cos x + C$
$= x - 2\cos x - x\sin x + C$
(Cは積分定数)

(3)

$f(x) = 0$ をみたす x は増減表から
$\pi < x < 2\pi$ にあり、それを α とおくと

$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$
$= \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{2\pi} (-f(x))\,dx$
$= 2(\alpha - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha)$
$\quad - (-2) - (2\pi - 2)$
$= 2(\alpha - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha) - 2\pi + 4$

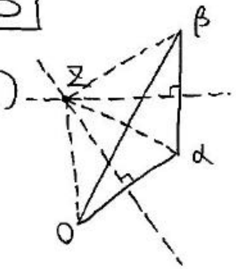
ここで

$f(\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow 1 + \sin\alpha - \alpha\cos\alpha = 0$
増減表から $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ のときのみ成立。

$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$
$= 2\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi\right) - 2\pi + 4$
$= \underline{4\pi + 4}$

$\boxed{3}$

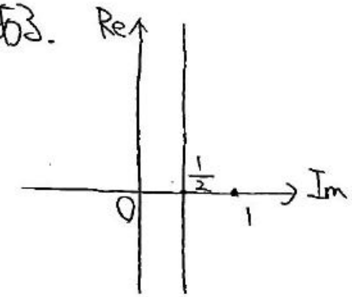
(1)



$|z| = |z - \alpha| = |z - \beta|$
$\Leftrightarrow |\alpha\beta| = |\alpha\beta - \alpha| = |\alpha\beta - \beta|$

$\begin{cases} |\alpha| = |\alpha - 1| \\ |\beta| = |\beta - 1| \end{cases}$

α, β ともに 0 と 1 の垂直二等分線上にある。



(2)

$\alpha = \frac{1}{2} + ai$
$\beta = \frac{1}{2} + bi$ $\quad (a, b \in \mathbb{R})$

とおくと

$z = \left(\frac{1}{2} + ai\right)\left(\frac{1}{2} + bi\right)$
$= \frac{1}{4} - ab + \frac{a+b}{2}i$

$z = x + yi$ とすれば

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} - ab \\ y = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{1}{4} - x \\ a+b = 2y \end{cases}$$

実数 a, b を解にもつ2次方程式は

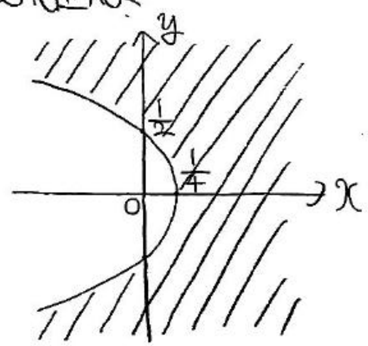
$$t^2 - 2yt + \frac{1}{4} - x = 0$$

であり t が異なる2つの実数解をもつ条件を答えればよい。($\because a \neq b$)

$$\frac{D}{4} = y^2 - \left(\frac{1}{4} - x\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 > \frac{1}{4} - x \Leftrightarrow x > \frac{1}{4} - y^2$$

求める範囲は



図の斜線部分。境界線含まず。

4

(1)

10回でゲームが終わるためには9回で9まで進めばよい。

1回で最低でも 進むので、9回連続で1を出せばよい。

10回目はどんな目でもいいので

$$P_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot 1 = \left(\frac{1}{6}\right)^9$$

(2)

P_9

$= P(8回で8) + P(8回で9)$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^8 \underbrace{\frac{5}{6}}_{\boxed{最後は2以上}} + {}_8C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot 1$$

$$= \frac{5+48}{6^9} = \frac{53}{6^9}$$

(3)

P_3

$= P(2回で4) + P(2回で5)$

$+ P(2回で6) + P(2回で7)$

$+ P(2回で8) + P(2回で9)$

$$= \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{36} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{36} \cdot \frac{3}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{6} + \frac{4}{36} \cdot \frac{6}{6} = \frac{11}{24}$$

5

$P(x, y)$ とおく。

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \leqq a$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (x-3)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \leqq a$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 14 + 3y^2 - 6y + 5 \leqq a$$

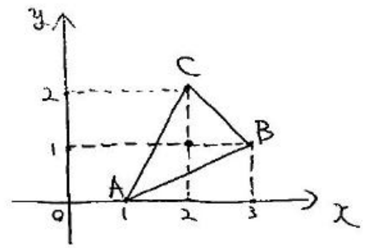
$$\Leftrightarrow 3(x-2)^2 + 2 + 3(y-1)^2 + 2 \leqq a$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq \frac{a-4}{3} \quad \cdots ①$$

(1) ①が成り立つような a の範囲は

$$a \geqq 4$$

(2)



$D \supset T$ であるには

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \geqq \sqrt{2}$$

$$\therefore \ a \geqq 10$$

(3)

$D \subset T$ であるには

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \leqq \{(2, 1)と三辺との距離の最小値\}$$

であればよい。

$(2, 1)$ と辺BCの距離は $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(2, 1)$ と辺AB, 辺ACの距離は同じでそれを d とおくと辺ACは

$$y = 2(x-1) \Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$$

より

$$d = \frac{|4-1-2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

なので d の方が $\frac{\sqrt{2}}{2}$ より小さい。

ゆえに

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

解くと

$$a \leqq \frac{23}{5}$$

(1) とあわせて

$$4 \leqq a \leqq \frac{23}{5}$$