2017 福岡大(医)

I

(a)

$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

$= 8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$= 8-4\cdot 4+2\cdot 1-3 = \underline{-9}$ //

$\dfrac{1}{2-\alpha}+\dfrac{1}{2-\beta}+\dfrac{1}{2-\gamma}$

$= \dfrac{(2-\beta)(2-\gamma)+(2-\alpha)(2-\gamma)+(2-\alpha)(2-\beta)}{(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)}$

$= \dfrac{12-4(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)}$

$= \dfrac{12-4\cdot 4+1}{-9} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{2-\alpha}\cdot\dfrac{1}{2-\beta}+\dfrac{1}{2-\beta}\cdot\dfrac{1}{2-\gamma}+\dfrac{1}{2-\gamma}\cdot\dfrac{1}{2-\alpha}$

$= \dfrac{2-\gamma+2-\alpha+2-\beta}{-9} = -\dfrac{2}{9}$

$\dfrac{1}{2-\alpha}\cdot\dfrac{1}{2-\beta}\cdot\dfrac{1}{2-\gamma} = -\dfrac{1}{9}$

$\therefore a=-\dfrac{1}{3}\quad b=-\dfrac{2}{9}\quad c=\dfrac{1}{9}$

$\therefore a+b+c = \underline{-\dfrac{4}{9}}$ //

(ii)

$AB=GL$ より

$L^2-AB=L(L-G)=1680$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 1680 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} G & A & B \\ \hline & A' & B' \end{array} \quad \downarrow \quad GA'B'=L$$

$GA'B'(GA'B'-G)$

$= G^2A'B'(A'B'-1) = 2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7$

(i) $G=1$ のとき

$L(L-1)=1680$

これをみたす $L\in N$ は存在しない。

(ii) $G^2=2^2$ のとき

$4A'B'(A'B'-1)=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7$

$\Leftrightarrow A'B'(A'B'-1)=4\cdot 3\cdot 5\cdot 7=420$

$\therefore A'B'=21$

(iii) $G^2=2^4$ のとき

$A'B'(A'B'-1)=105$

これをみたす $A'B'\in N$ は存在しない。

以上より $G=\underline{2}$ //

このとき $A'B'=21$ より

$(A',B')=(1,21),(3,7)$

$\underline{(A,B)=(2,42),(6,14)}$ //

(iii)

赤　青　黄

○○|○|○○ ○ $\cdots {}_7C_2$

赤　青　黄

◎|◎ ◎|◎ $\cdots {}_6C_2$

${}_7C_2\times{}_6C_2=21\cdot 15=\underline{315\text{通り}}$ //

n(どの箱にも少なくとも1つ)

$=315$

$-n$(赤青に入る)

$-n$(青黄に入る)

$-n$(黄赤に入る)

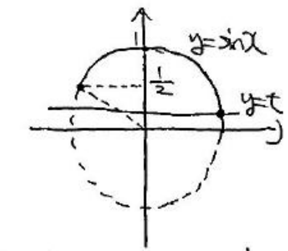
$-n$(1つの箱に入る)

$=315-({}_6C_1\cdot{}_5C_1-2)\times 3-3$

$\boxed{\text{1つの箱に入るとき}}$

$=315-84-3=\underline{228\text{通り}}$ //

[II]



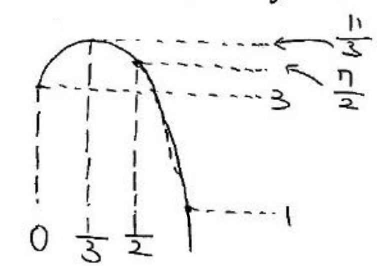
図より $\underline{0\leqq t<\dfrac{1}{2},\ t=1}$ //

$3\underbrace{\cos 2x}_{1-2\sin^2 x}+4\sin x-k=0$

$\Leftrightarrow -6\sin^2 x+4\sin x+3=k$

$\Leftrightarrow k=-6t^2+4t+3$

$=-6\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{11}{3}\quad (0\leqq t<1)$



求める範囲は

$0\leqq t<\dfrac{1}{2}$ で交点2コ

または

$\dfrac{1}{2}\leqq t<1$ で交点1コ

なので

$\underline{\dfrac{7}{2}<k<\dfrac{11}{3}\ \text{または}\ 1<k<3}$ //

(ii) Mの要素を帯分数使って表す.

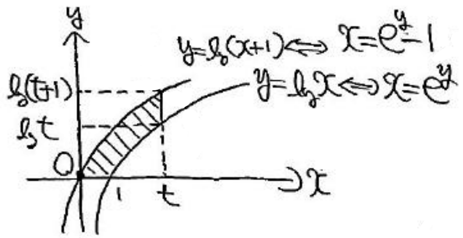
$m\frac{1}{20}, m\frac{3}{20}, m\frac{7}{20}, m\frac{9}{20}, m\frac{11}{20},$
$m\frac{13}{20}, m\frac{17}{20}, m\frac{19}{20}, (m+1)\frac{1}{20}, \cdots$
$, (n-1)\frac{19}{20}$

(個数) $= 8\times\{(n-1)-m+1\}$
$= \underline{8(n-m)}$ //

(総和) $=$ (帯の総和)
$+$ (分数の総和)
$= (m+n-1)(n-m)\frac{1}{2}\cdot 8$
$+ \frac{80}{20}(n-m)$
$= 4(n-m)(m+n-1+1)$
$= \underline{4(n-m)(n+m)}$ //

III

(i)



$V(t)$
$= \int_0^{\log(t+1)} \{t^2\pi - (e^y-1)^2\pi\}dy$
$- \int_0^{\log t} \{t^2\pi - (e^y)^2\pi\}dy$
$= \pi\int_0^{\log(t+1)} \{t^2 - e^{2y} + 2e^y - 1\}dy$
$- \pi\int_0^{\log t} (t^2 - e^{2y})dy$
$= \pi\left[t^2y - \frac{1}{2}e^{2y} + 2e^y - y\right]_0^{\log(t+1)}$
$- \pi\left[t^2y - \frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^{\log t}$
$= \pi\left[t^2y - \frac{1}{2}e^{2y}\right]_{\log t}^{\log(t+1)}$
$+ \pi\{2(t+1) - \log(t+1) - 2\}$
$= \pi\{t^2\log(t+1) - \frac{1}{2}(t+1)^2$
$- t^2\log t + \frac{1}{2}t^2\}$
$+ \pi(2t - \log(t+1))$
$= \pi\{t^2\log(1+\frac{1}{t}) - t - \frac{1}{2} + 2t$
$- \log(t+1)\}$
$= \underline{\pi\{t^2\log(1+\frac{1}{t}) - \log(t+1) + t - \frac{1}{2}\}}$ //

(ii)

$V'(t)$
$= \pi\{2t\log(1+\frac{1}{t}) + t^2\frac{t}{t+1}(-\frac{1}{t^2})$
$- \frac{1}{t+1} + 1\}$
$= \pi\{2t\log(1+\frac{1}{t}) - \frac{t}{t+1} - \frac{1}{t+1} + 1\}$
$= 2\pi t\log(1+\frac{1}{t})$

$\lim_{t\to\infty} V'(t)$
$= \lim_{t\to\infty} \log(1+\frac{1}{t})^{2\pi t}$
$= \lim_{t\to\infty} \log\{(1+\frac{1}{t})^t\}^{2\pi}$
$= \log e^{2\pi}$
$= \underline{2\pi}$ //