2016 早稲田理工

$\boxed{1}$

(1)

$f(m,n)=2f(m-1,n)$

より

$f(m,n)=f(1,n)2^{m-1}$ ---①

$\downarrow n=1$ を代入

$f(m,1)=1\cdot 2^{m-1}=\underline{2^{m-1}}$ //

条件の一番下の式は隣接4項間漸化式．特性方程式

$\alpha^3+3\alpha=3\alpha^2+1$

$\Leftrightarrow (\alpha-1)^3=1$

$\therefore \alpha=1$

公比が1になるように作る

これより

$f(m,n)-2f(m,n-1)+f(m,n-2)$

$=f(m,n-1)-2f(m,n-2)+f(m,n-3)$

$=f(m,n-2)-2f(m,n-3)+f(m,n-4)$

$=\cdots$

$=f(m,3)-2f(m,2)+f(m,1)$

$\downarrow m=1$ を代入

$f(1,n)-2f(1,n-1)+f(1,n-2)$

$=f(1,3)-2f(1,2)+1$

ここで

$\underbrace{f(3,3)}_{20}=2f(2,3)=4f(1,3)$

$\therefore f(1,3)=5$

$\underbrace{f(2,2)}_{6}=2f(1,2)$

$\therefore f(1,2)=3$

なので

$f(1,n)-2f(1,n-1)+f(1,n-2)=0$

この隣接3項間漸化式の特性方程式の特性解は1より

$f(1,n)-f(1,n-1)$

$=f(1,n-1)-f(1,n-2)$

$=f(1,n-2)-f(1,n-3)$

$=\cdots$

$=f(1,2)-f(1,1)$

$=3-1=2$ 公差

$\therefore f(1,n)=f(1,1)+(n-1)2$

$=\underline{2n-1}$ //

(2)

①より

$f(m,n)=(2n-1)2^{m-1}$

$\therefore f(6,32)=63\cdot 32$

$=\underline{2016}$ //

(3)

$m=1$ とすれば

$f(m,n)=2n-1$

となるのですべての奇数が表現可能とである．

$m=2$ とすれば

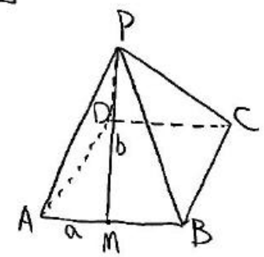
$f(m,n)=2(2n-1)$

となるのですべての偶数が表現可能とである．

以上より $f(m,n)$ は任意の正の整数が表現できるので，それに対応した正の整数 m,n が存在．

$\boxed{2}$

(1)



球の半径を r とする．

$(体積)=(表面積)\times r\times\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 4a^2\times\sqrt{b^2-a^2}\times\frac{1}{3}$

$=(4ab+4a^2)\times r\times\frac{1}{3}$

$\therefore r=\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{b+a}$

(2)

$\frac{球の表面積}{正四角錐の表面積}$

$=\frac{4\pi r^2}{4ab+4a^2}$

$=\frac{\pi}{a(b+a)}\cdot\frac{a^2(b^2-a^2)}{(b+a)^2}$

$=\frac{a(b-a)}{(b+a)^2}\pi$

$=\underline{\frac{x-1}{(x+1)^2}\pi}$ // $(x>1)$

$=f(x)\pi$ とおく

(3)

$f'(x)$

$=\frac{(x+1)^2-(x-1)2(x+1)}{(x+1)^4}$

$=\frac{3-x}{(x+1)^3}$

x	$1\cdots 3\cdots$
$f'(x)$	$+\ 0\ -$
$f(x)$	$\nearrow\quad\searrow$

$x=3$ のとき，求める最大値は

$\underline{\frac{\pi}{8}}$ //

$\boxed{3}$

(1)

$f^n(z)=f(f^{n-1}(z))$

$=\alpha f^{n-1}(z)+\beta \cdots ①$

解

$k=\alpha k+\beta$

$\therefore k=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$

①を

$f^n(z)-\dfrac{\beta}{1-\alpha}=\alpha\left\{f^{n-1}(z)-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right\}$

と変形.

$f^n(z)-\dfrac{\beta}{1-\alpha}=\left\{f^1(z)-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right\}\alpha^{n-1}$

$\Leftrightarrow f^n(z)=\alpha^n z-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\alpha^n+\dfrac{\beta}{1-\alpha}$

(2)

$f^n(z)=\left(z-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^n+\dfrac{\beta}{1-\alpha}$

より

$\lim_{n\to\infty}|f^n(z)-d|$

$=\left|\lim_{n\to\infty}\left(z-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^n+\dfrac{\beta}{1-\alpha}-d\right|$

$=\left|\dfrac{\beta}{1-\alpha}-d\right|=0 \quad (\because |\alpha|<1)$

$\therefore d=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$

(3)

$f_n(z)-\dfrac{\beta}{1-\alpha}=\left(z-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^n$

より

$\left|f_n(z)-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right|$

$=\left|\left(z-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^n\right|$

$=\left|z-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right||\alpha|^n=\left|z-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right|$

より C_zの中心は$\dfrac{\beta}{1-\alpha}$, 半径$\left|z-\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right|$

$\boxed{4}$

$f'(x)=3x^2-1$

$(t, f(t))$での接線は

$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$

$=(3t^2-1)x-2t^3 \cdots ①$

これが $y=m(x-p)+q=mx-mp+q$

となるような条件は

$\begin{cases} 3t^2-1=m \\ -2t^3=-mp+q \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2=\dfrac{m+1}{3} \\ t^3=\dfrac{mp-q}{2} \end{cases}$

求める条件は

$\dfrac{m+1}{3}\geqq 0$ かつ $\left(\dfrac{m+1}{3}\right)^3=\left(\dfrac{mp-q}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{m+1}{3}\right)^3=\left(\dfrac{mp-q}{2}\right)^2$

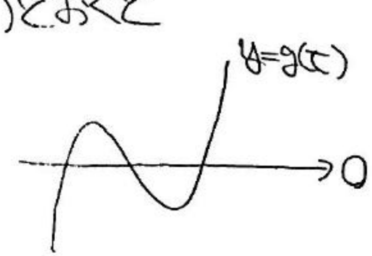
(2)(3)

①が(p, q)を通るので

$q=(3t^2-1)p-2t^3$

$\Leftrightarrow 2t^3-3pt^2+p+q=0$

この方程式が異なる3つの実数解をもつ条件を求めればよい. 左辺を$g(t)$とおくと



$g(t)$の(極大値)(極小値)<0

となればいいので

$g'(t)=6t^2-6pt$

$=6t(t-p)$

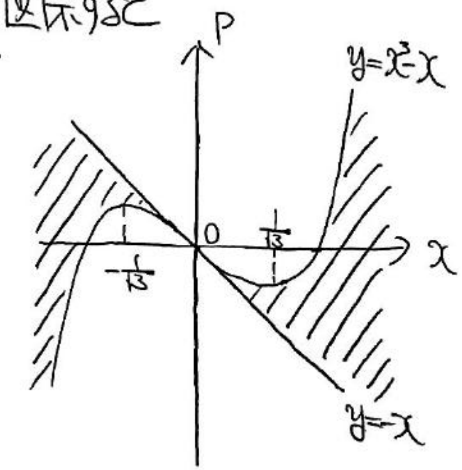
$g(0)g(p)$

$=(p+q)(-p^3+p+q)<0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} p+q>0 \\ \text{かつ} \\ -p^3+p+q<0 \end{cases}$ または $\begin{cases} p+q<0 \\ \text{かつ} \\ -p^3+p+q>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} q>-p \\ \text{かつ} \\ q<p^3-p \end{cases}$ または $\begin{cases} q<-p \\ \text{かつ} \\ q>p^3-p \end{cases}$

図示すると



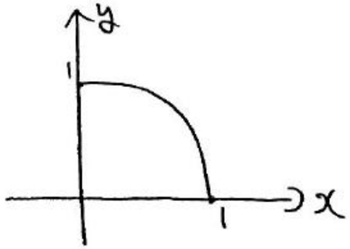
領域は斜線部分. 境界線含まず.

$\boxed{5}$

(1)

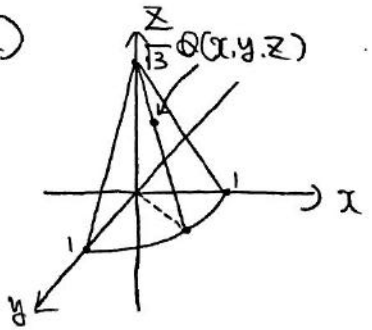
$AP^2 = a^2+b^2+3 = 2^2$

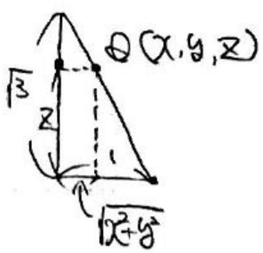
$\therefore\ a^2+b^2=1 \quad (a \geqq 0,\ b \geqq 0)$



$x^2+y^2=1$ の $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ の部分.

(2)



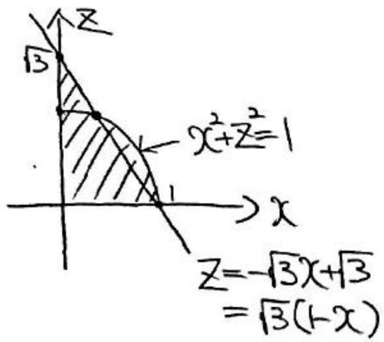


$z = \sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{3}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)$ //

(3)

xy平面の四分円をxz平面に折りたたむ.



交点は連立して

$x^2+3(1-x)^2=1$

$\Leftrightarrow\ 4x^2-6x+2=0$

$\Leftrightarrow\ 2x^2-3x+1=0$

$\Leftrightarrow\ (2x-1)(x-1)=0$

$x = \frac{1}{2},\ 1$.

F上のすべてのQをxz平面上, xy平面上に射影したときには $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形, 四分円内に入るので求める回転体は上の図のx軸まわりの回転体である.

よって

(i) $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ のとき

$S(t) = \{\sqrt{3}(1-t)\}^2\pi$

$= 3\pi(1-t)^2$

(ii) $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき

$S(t) = \pi(1-t^2)$ //

(4)

V

$= \int_0^{\frac{1}{2}} 3\pi(1-t)^2\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \pi(1-t^2)\,dt$

$= \pi\left[-(1-t)^3\right]_0^{\frac{1}{2}} + \pi\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= \frac{13}{12}\pi$ //